

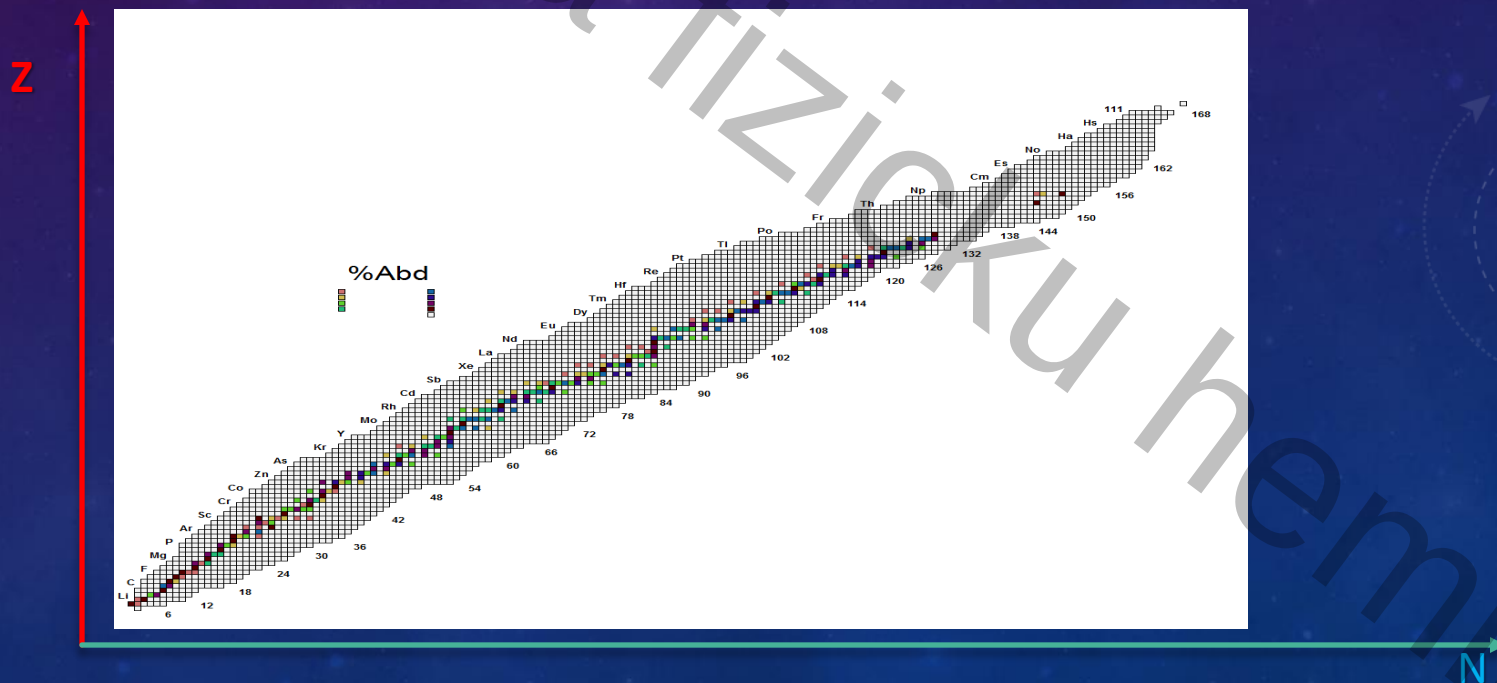
The background is a deep blue space filled with stars, nebulae, and various mathematical and scientific diagrams. In the center, there is a large, glowing sphere containing several smaller, colorful spheres (red, blue, green) representing atomic nuclei. Surrounding this central sphere are various geometric shapes, including circles, lines, and a large, complex structure resembling a DNA helix or a molecular model. The overall theme is the intersection of physics, chemistry, and mathematics.

ОСОБИНЕ И МОДЕЛИ АТОМСКОГ ЈЕЗГРА

ДИСТРИБУЦИЈА СТАБИЛНИХ НУКЛИДА

N	парно	непарно	парно	непарно
Z	парно	парно	непарно	непарно
број	160	53	49	4

Стабилни непарно-непарни нуклиди: ^2H , ^6Li , ^{10}B , ^{14}N , (^{50}V)



ЕНЕРГИЈА ВЕЗЕ ЈЕЗГРА

- Разлика између стварне масе језгра и збира маса свих нуклеона који га чине, изражена преко енергије, назива се **укупна енергија везивања** $B_{\text{tot}}(A, Z)$

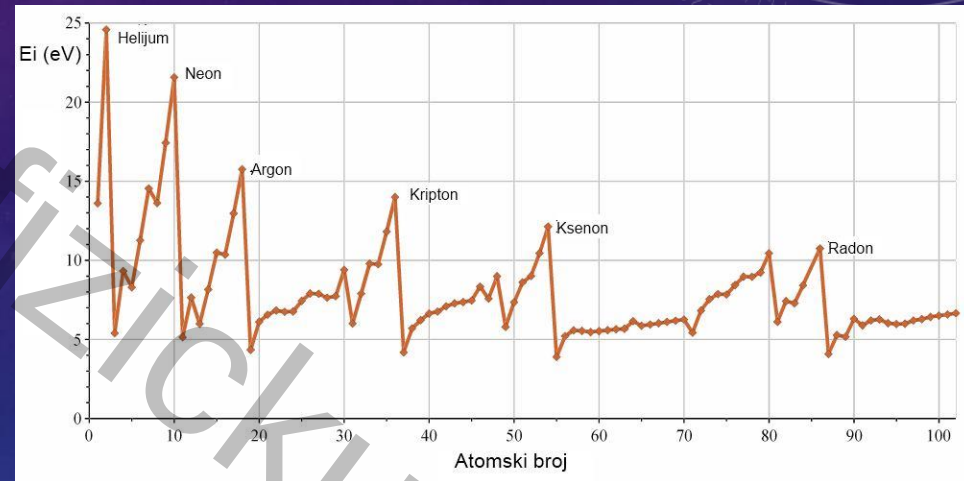
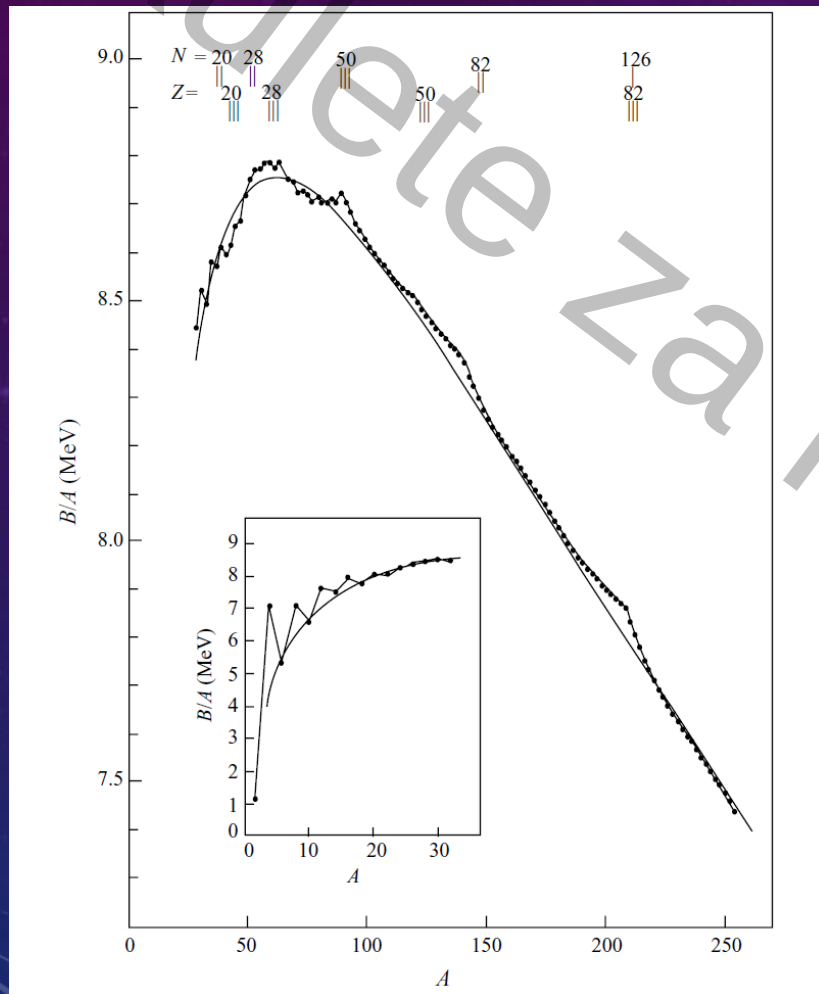
$$B_{\text{tot}}(A, Z) = [ZM(p) + (A - Z)M(n) - M(A, Z)]c^2$$

- Средња енергија везивања по нуклеону

$$B_{\text{av}}(A, Z) = \frac{B_{\text{tot}}(A, Z)}{A}$$

је **мера релативне стабилности језгра**

ЕНЕРГИЈА ВЕЗИВАЊА ПО НУКЛЕОНУ У ФУНКЦИЈИ А



B_{av} за већину језгара износи 7,5-8,8 MeV

ЗАВИСНОСТ B_{AV} ОД A УКАЗУЈЕ ДА

- Интеракција (сила) између нуклеона показује засићење и кратког је домета
- Постоје посебно стабилне нуклеонске конфигурације сличне електронским код инертних гасова
- Пад B_{av} при вишим вредностима A последица је повећања утицаја Кулоновског одбијања међу протонима

ЕНЕРГИЈА ВЕЗЕ ЈЕЗГРА (2)

- Енергија издвајања честице из језгра (нпр. неутрона)

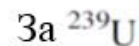
$$S_n = [M(A - 1, Z) + M(n) - M(A, Z)]c^2 \text{ или}$$

$$S_n = [B_{tot}(A - 1, Z) - B_{tot}(A, Z)]$$

$$S_n = [M(A - 1, Z) + M(n) - M(A, Z)]c^2$$



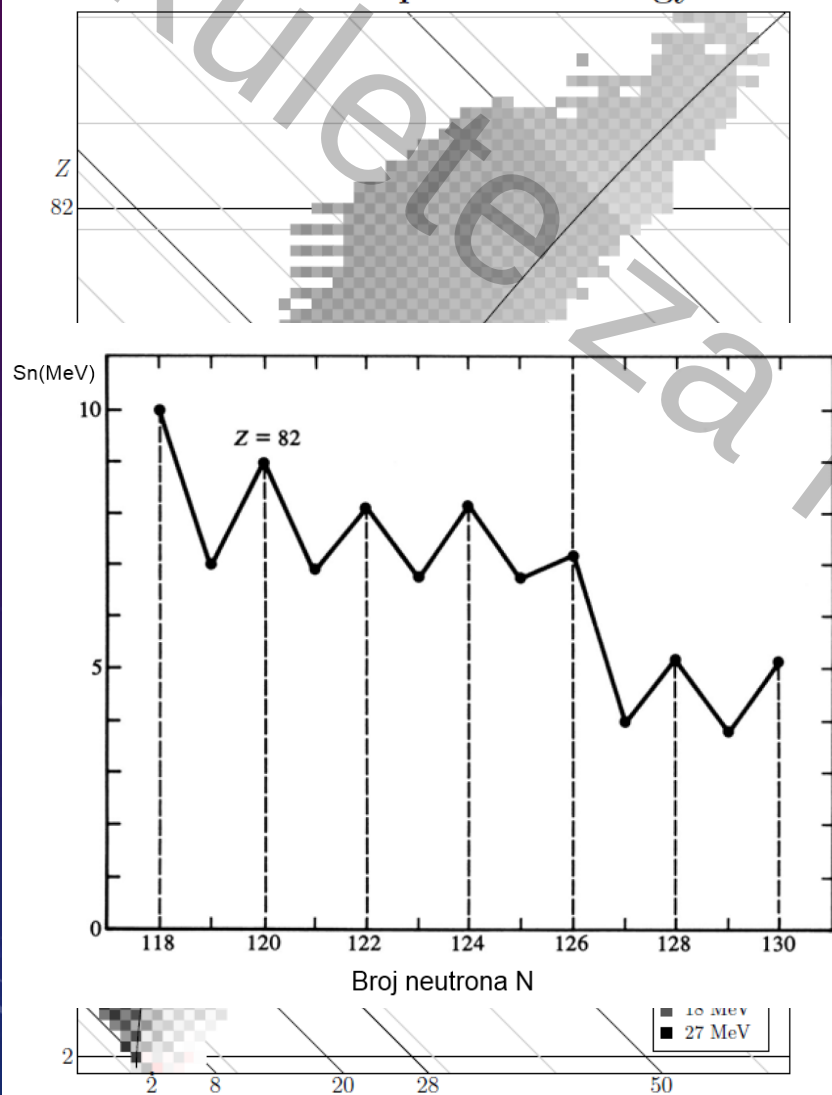
$$\begin{aligned} S_n &= [M_{^{235}\text{U}} + M_n - M_{^{236}\text{U}}]c^2 \\ &= 40.914 + 8.071 - 42.441 \\ &= 6.544 \text{ MeV} \end{aligned}$$



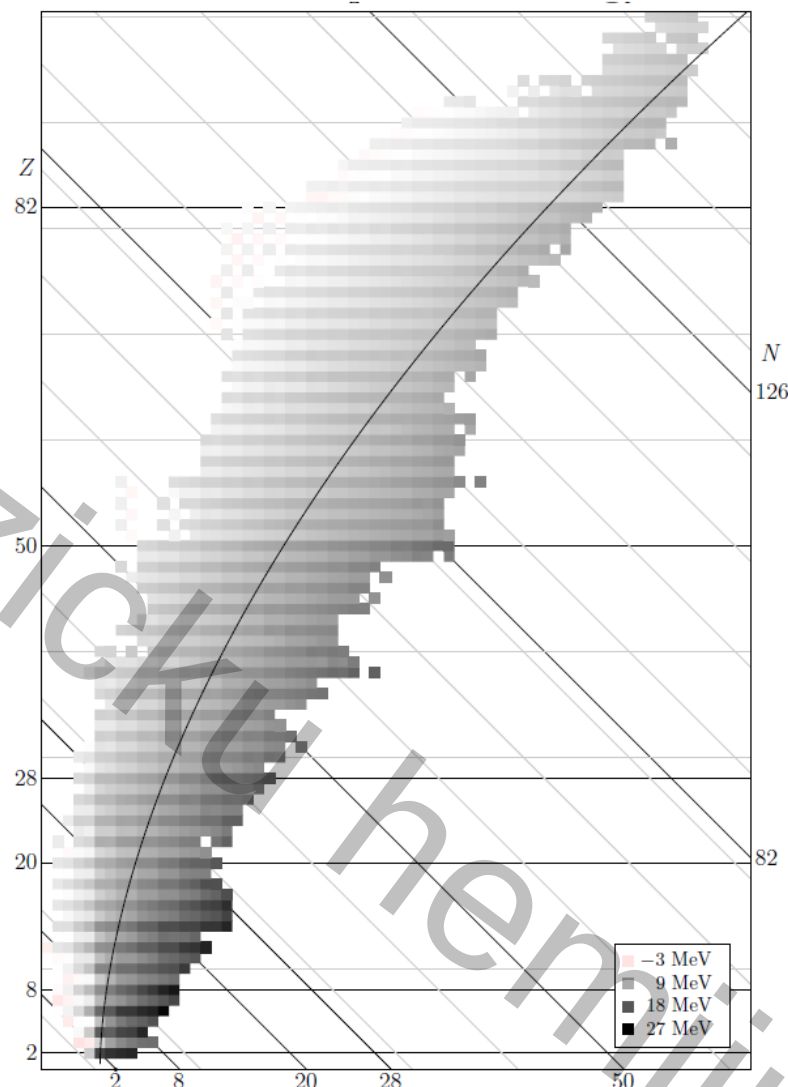
$$\begin{aligned} S_n &= [M_{^{238}\text{U}} + M_n - M_{^{239}\text{U}}]c^2 \\ &= 47.304 + 8.071 - 50.596 \\ &= 4.779 \text{ MeV} \end{aligned}$$

СЕПАРАЦИОНА ЕНЕРГИЈА НУКЛЕОНА

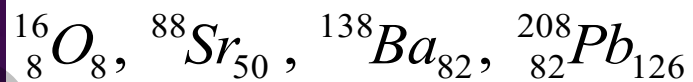
Energija separacije neutrona



Energija odvajanja protona



- Најобилнији нуклиди у природи су они са магичним или двоструко магичним бројевима (не узимајући обзир језгра са $A < 19$)



- Број стабилних нуклида у околини магичних бројева

Област око магичног броја Z	Магични број -1	Магични број	Магични број+1
Калцијум (20)	${}_{19}\text{K}$: 2	${}_{20}\text{Ca}$: 6	${}_{21}\text{Sc}$: 1
Калај (50)	${}_{49}\text{In}$: 2	${}_{50}\text{Sn}$: 10	${}_{51}\text{Sb}$: 2
Олово (82)	${}_{81}\text{Tl}$: 2	${}_{82}\text{Pb}$: 4	${}_{83}\text{Bi}$: 1

- Ефикасни пресек за апсорпцију неутрона (σ)
 - $N = \text{магични број} - 1 \rightarrow \text{високо } \sigma$
 - $N = \text{магични број} \rightarrow \text{ниско } \sigma$



СЕПАРАЦИОНЕ ЕНЕРГИЈЕ НУКЛЕОНА УКАЗУЈУ ДА

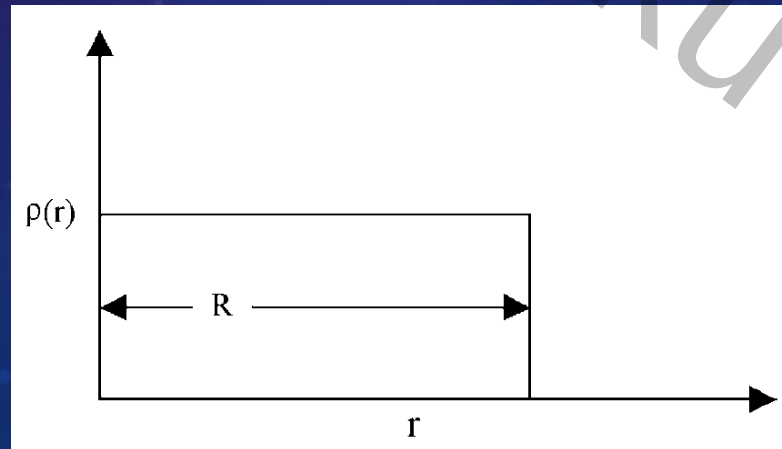
- S_n је веће за јегра која садрже паран број неутрона него за она са непарним
- S_n је веће за јегра која садрже паран број протона него за она са протона
- Парно-парна језгра су стабилнија од осталих
- Најнестабилнија су непарно-непарна језгра



У језгру постоји спаривање само између истог типа честица

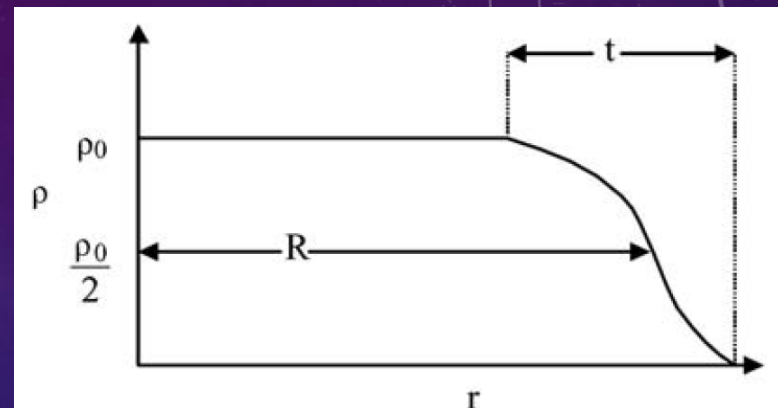
РАДИЈУС И ГУСТИНА ЈЕЗГРА

- Димензије неколико фемтометара ($1\text{fm}=10^{-15}\text{ m}$)
- $R = r_0 A^{1/3}$ $r_0 \{r_c \approx 1,2\text{ fm}, r_m = 1,4\text{ fm}\}$
- $\rho(A) = \frac{M}{V} \approx \frac{A}{4\pi R^3} \approx 2 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^3}$ (0,14 нуклеона/ fm^3)
- Прва апроксимација – језгро као сфера са униформном густином која пада на нулу на ивици језра (модел билијарске кугле).

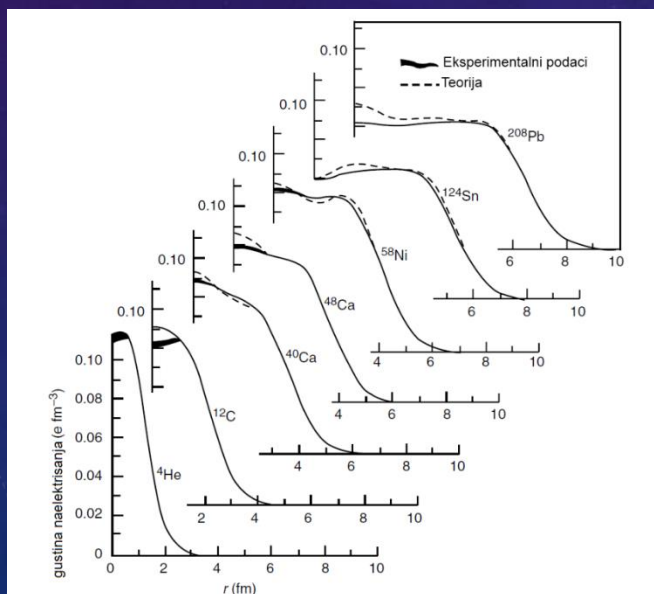


РАДИЈУС И ГУСТИНА ЈЕЗГРА (2)

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-R)/a}}$$



- модел 2. Дистрибуција густине у језгру апроксимирана Фермијевом расподелом



Језгро	Фракција нуклеона у омотачу језгра
¹² C	0,90
²⁴ Mg	0,79
⁵⁶ Fe	0,65
¹⁰⁷ Ag	0,55
¹³⁹ Ba	0,51
²⁰⁸ Pb	0,46
²³⁸ U	0,44

СПИН ЈЕЗГРА

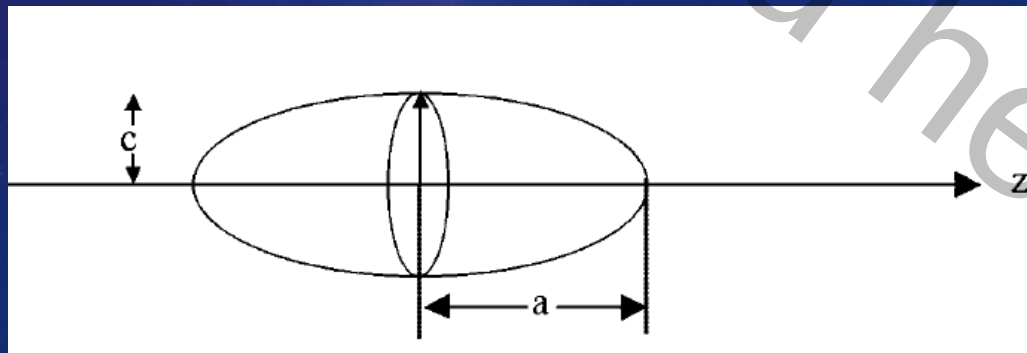
- Нуклеони имају спин $\frac{1}{2}$ (фермиони) што је закључено из мерења магнетног момента.
- Спин је инхерентна особина елементарних честица и није последица никаквог „обртања честице око своје осе“ и поседују га и ненаелектрисане честице
- Нуклеони се састоје од мањих елементарних честица-кваркова који такође имају спин и чија сума чини да неутрон има спин.
- Спин језгра је сума спинова појединачних нуклеона, водећи рачуна о правилу спаривања и Паулијевом принципу.

КВАДРУПОЛНИ ЕЛЕКТРИЧНИ МОМЕНТ ЈЕЗГРА

- Електрични моменти представљају дистрибуцију наелектрисања унутар језгра
- У језгру због особина дистрибуције густине наелектрисања може да постоји само квадруполни момент

$$Q = \iiint r^2 \rho(r) \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$$

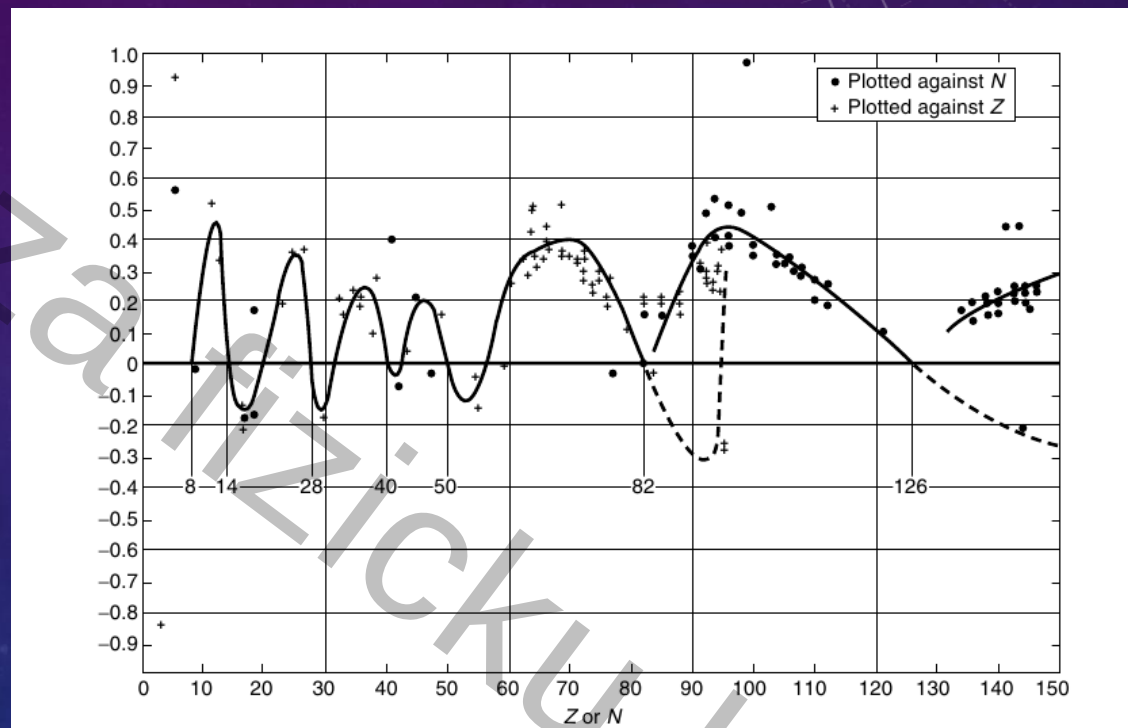
- $Q=0$ за сферно симетрична језгра
- $Q \neq 0$ за остала језгра, $Q > 0$ облик елипсоида, $Q < 0$ облик палачинке



КВАДРУПОЛНИ ЕЛЕКТРИЧНИ МОМЕНТ И ОБЛИК ЈЕЗГРА

$$Q = \frac{2}{5}Ze(a^2 - c^2)$$

$$R^2 = \frac{1}{2}(a^2 + c^2) = (r_0 A^{1/3})^2$$



$a/c > 1$ облик елипсоида

$a/c < 1$ облик диска (палачинке)

ИСТОРИЈАТ МОДЕЛА ЈЕЗГРА

- J. J. Thompson plum pudding model
- Rutherford – позитивно наелектрисање је сконцентрисано у центру атома у простору радијуса 10^{-14} m.
- Језгро састављено од протона
- Откриће неутрона (Chadwick 1932)
- Модел течне капи (Гамов 1928, von Weizsäcker 1935.)
- Модел љуске (Wigner, Goepfert-Mayer, Jensen 1949.)

МОДЕЛ	Експериментални подаци који га подржавају
Модели независне честице	
• Модел љуске (1949)	Језгра са магичним бројевима
• Модел независне честице ('50)	Систематика квантних бројева нуклеона
• Модел Фермијевог гаса ('50)	Угаони моменти језгра и парности
	Шмитове границе
Колективни модели	
• Модел течне капи ('30)	Константна густина материје у језгру
• Модел сложеног језгра ('30)	Сатурација нуклеарних сила
• Колективни модел ('50)	Ефекти “површинског напона”
• Модел капљица ('60)	Зависност радијуса језгра од A
• Модел решетке ('80)	Фазни прелази експериментима са тешким јонима
Кластерски модели	
Модел кластера α честица ('30)	Алфа распад
• Модел сферона ('60)	Необична стабилност језгара $A=4n$
• 2Д Исингов модел ('75)	Заступљеност $4n$ кластера код фрагментације језгара
Модел интерагујућих бозона ('80)	Ефекти спаривања нуклеона
Кваркни модели ('80)	Особине нуклеарних сила

МОДЕЛ ТЕЧНЕ КАПИ

- Заснован на аналогним особинама јегра и капи течности
 - Нестишљивост и хомогеност [$\rho(r)$, $Z(r)=\text{const}$, запремина пропорционална броју честица)
 - Сила између честица не зависи од њихове природе
$$F_{pp}=F_{pn}=F_{nn}$$
 - Силе су кратког домета и имају показују засићење
 - Површински напон
 - Статистичка расподела енергије ексцитације (упадна честица) и деексцитације (производи реакције)

WEIZSÄCKER-OBA (1935) (BETHE-WEIZSÄCKER) ПОЛУЕМПИРИЈСКА ФОРМУЛА

- $B_{tot}(A, Z) = a_v A - a_s A^{\frac{2}{3}} - a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_a \frac{(A-2Z)^2}{A} \pm \delta$
- $a_v A$ атомски члан; a_v представља енергију везе између нуклеона у унутрашњости и његових суседа.



- Површински члан $a_s A^{\frac{2}{3}}$

$$S = 4\pi R^2, R \propto r_0 A^{\frac{1}{3}}, \quad S \propto A^{\frac{2}{3}}$$

- Енергија кулоновске интеракције

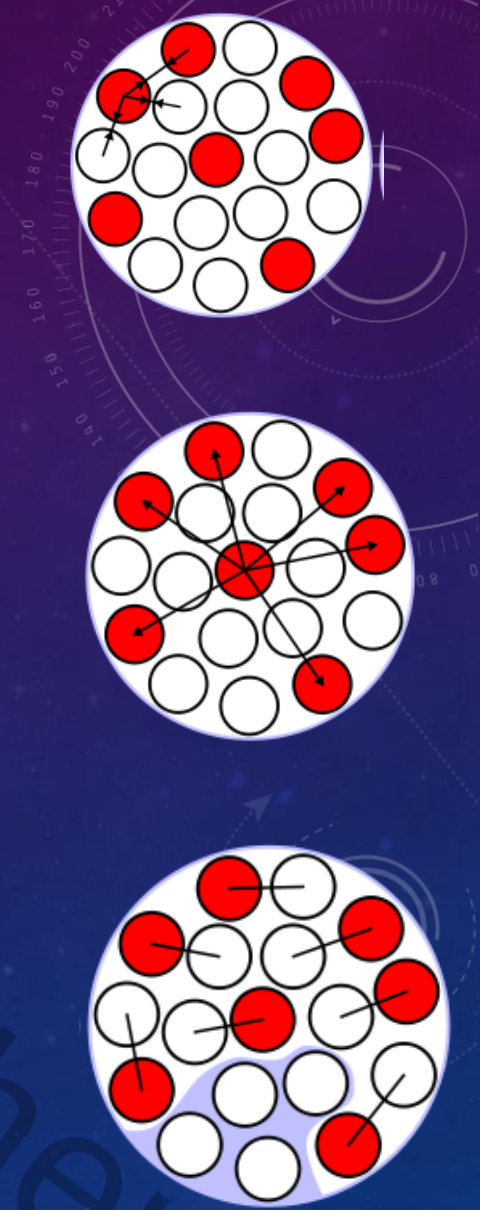
$$E_c = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{R} = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{A^{1/3}} = a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

- Енергетска асиметрија

- Разлика у енергијама између језгара са истим A али различитим бројем протона и неутрона

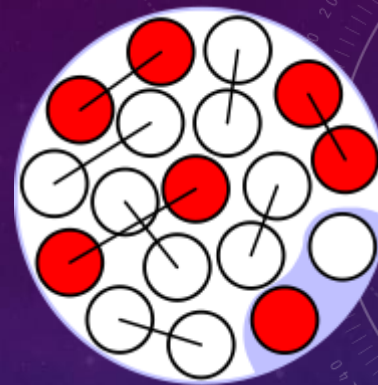
$$E_A = q^2 \Delta = \frac{(N-Z)^2 \Delta}{4}, \quad \Delta \propto \frac{1}{A},$$

$$E_A = \frac{(N-2Z)^2}{4A^{1/3}}$$



- Енергија спаривања, δ

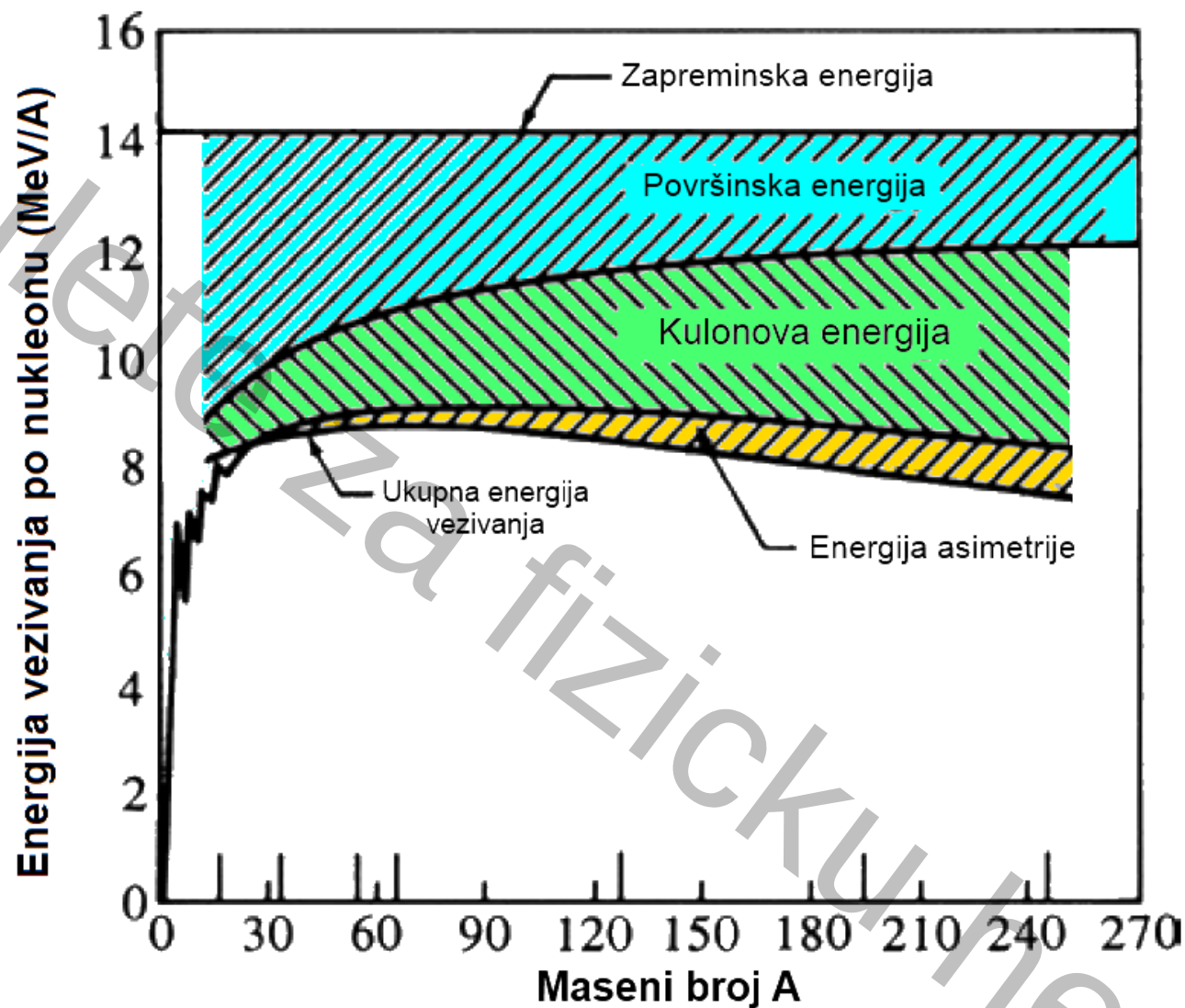
$$\delta = \begin{cases} 0, A \text{ непарно} \\ +, \text{ за парно} - \text{ парна језгра} \\ - \text{ за непарно} - \text{ непарна језгра} \end{cases}$$



a_v	15,56 MeV
a_s	17,23
a_c	0,7
a_A	23,285
a_p	$11/A^{1/2}$

- **Mayers-Swiatecky (1966)**

$$BE_{\text{tot}}(Z, A) = c_1 A \left[1 - k \left(\frac{N - Z}{A} \right)^2 \right] - c_2 A^{2/3} \left[1 - k \left(\frac{N - Z}{A} \right)^2 \right] - \frac{c_3 Z^2}{A^{1/3}} + \frac{c_4 Z^2}{A + \delta}$$



$$B_{tot}(A, Z) = a_v A - a_s A^{\frac{2}{3}} - a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_a \frac{(A - 2Z)^2}{A} \pm \delta$$

ПРИМЕНЕ/ПРЕДИКЦИЈЕ ПОЛУЕМПИРИЈСКЕ ФОРМУЛЕ

- Израчунавање радијуса језгра помоћу енергија везивања огледалских језгара, нпр. $^{31}\text{P}_{16}$ и $^{31}\text{S}_{15}$
 - $\Delta B = B(Z, N) - B(N, Z) = a_c A^{1/3} (N^2 - Z^2) = a_c A^{2/3}$
 - $R = r_0 A^{1/3}$
 - $a_c = 3/5 (e^2/r_0)$ $r_0 = 3/5 (e^2 / \Delta B) A^{2/3}$
- Предвиђање стабилности у изобарским серијама

$$B_{tot}(A, Z) = a_v A - a_s A^{\frac{2}{3}} - a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_a \left(A - 4Z + 4 \frac{Z^2}{A} \right)$$

- $M(A, Z) = [ZM(p) + (A - Z)M(n) - B_{tot}(A, Z)]$

- $M = A \left[M(n) - a_v + \frac{a_s}{A^{\frac{1}{3}}} + a_a \right] + Z[M(p) - M(n) - 4Za_a] + Z^2 \left(\frac{a_c}{A^{\frac{1}{3}}} + \frac{4a_0}{A} \right)$

- $A = \text{const}$

- $M = \alpha + \beta Z + \gamma Z^2$

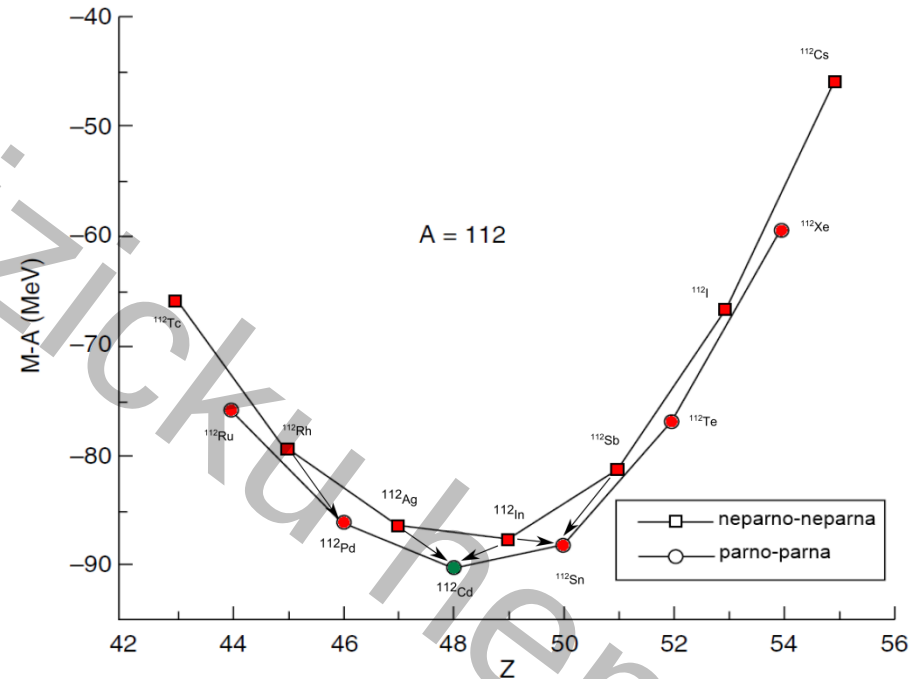
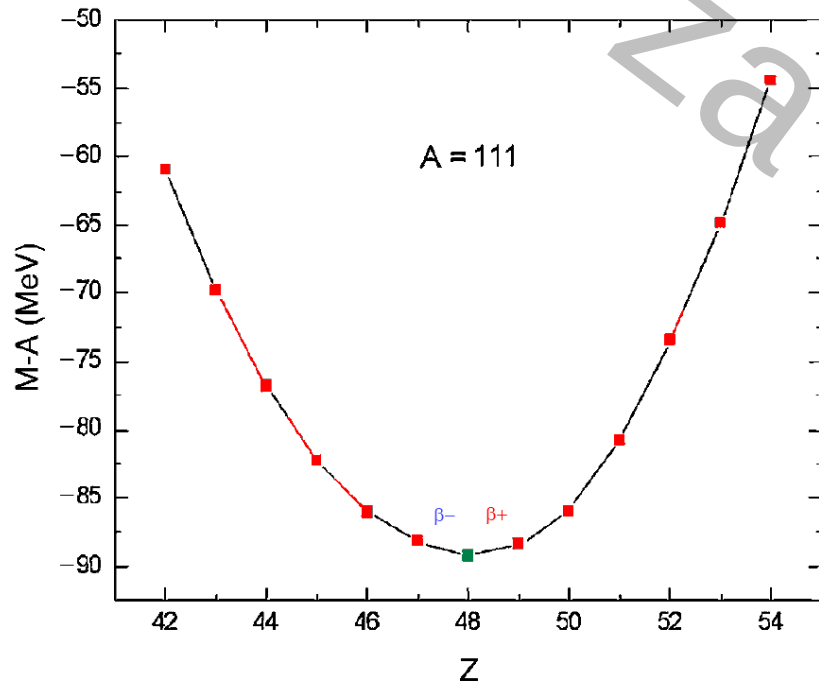
- $\left(\frac{\partial M}{\partial Z} \right) = \beta + 2\gamma Z = 0$

- $Z_A = -\frac{\beta}{2\gamma} = -\frac{M(p) - M(n) - 4a_a}{2 \left(\frac{a_c}{A^{\frac{1}{3}}} + \frac{4a_a}{A} \right)}$

$$\frac{Z_A}{A} \sim \frac{1}{2} \frac{81}{80 + 0,6A^{2/3}}$$

$$A \rightarrow 0, \frac{Z_A}{A} \sim \frac{1}{2}$$

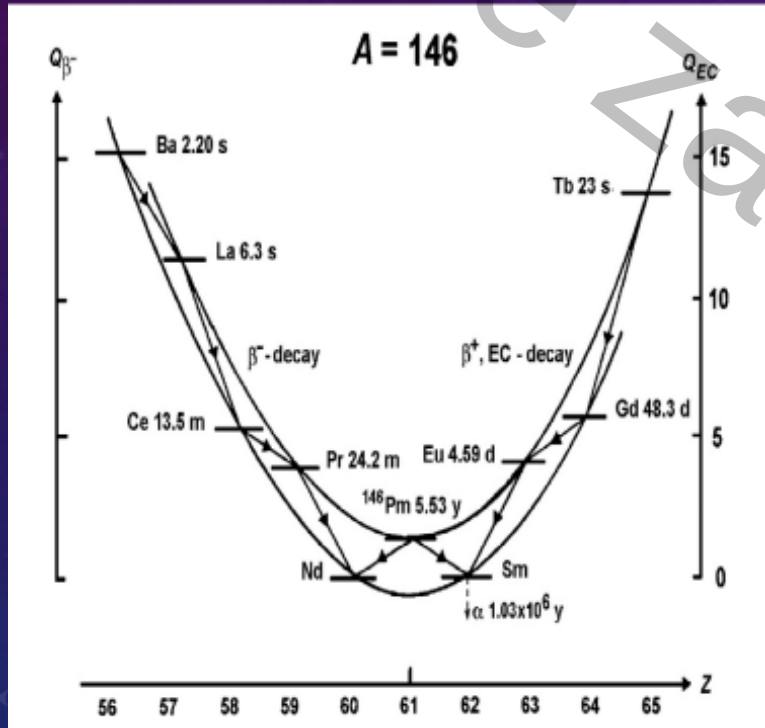
$$\text{Велико } A, \frac{Z_A}{A} < \frac{1}{2} \approx 0,4$$



Недостајући елемент Pm (Z=61)

$$Z = 2A/[4 + (a_c/a_a)A^{2/3}]$$

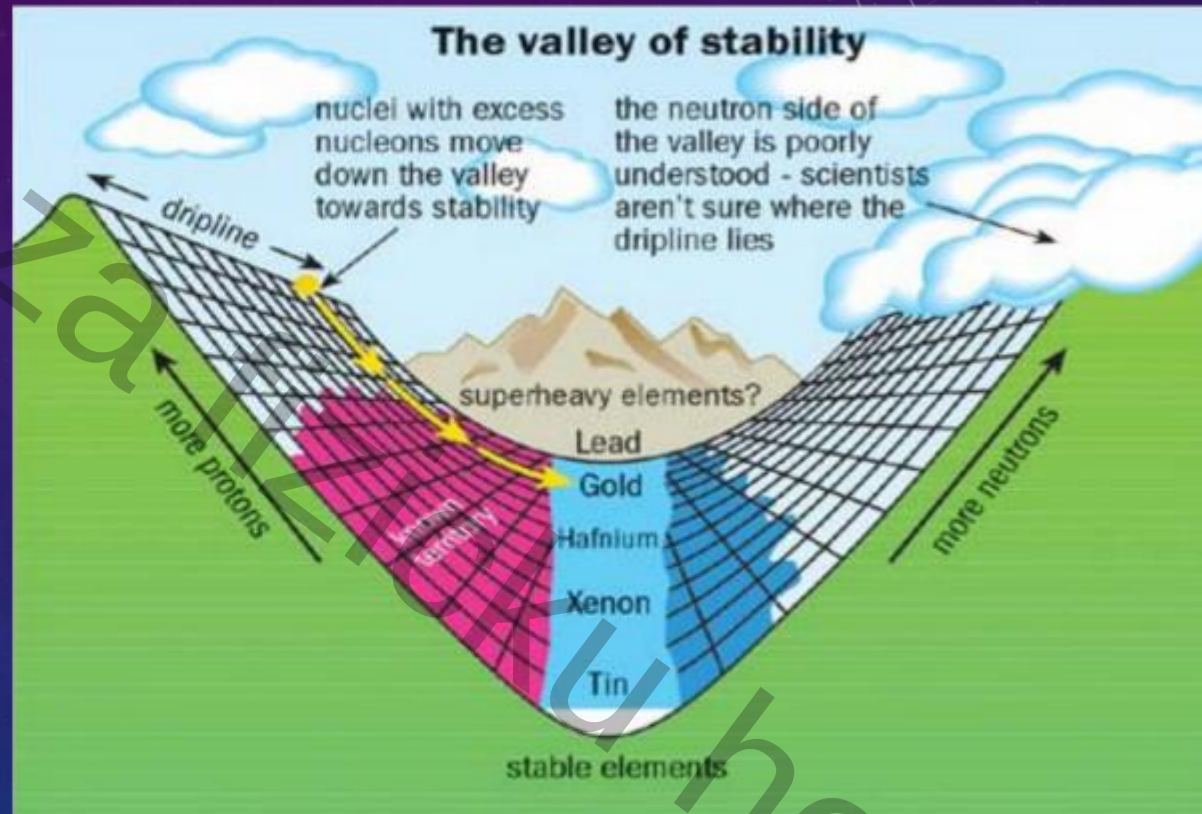
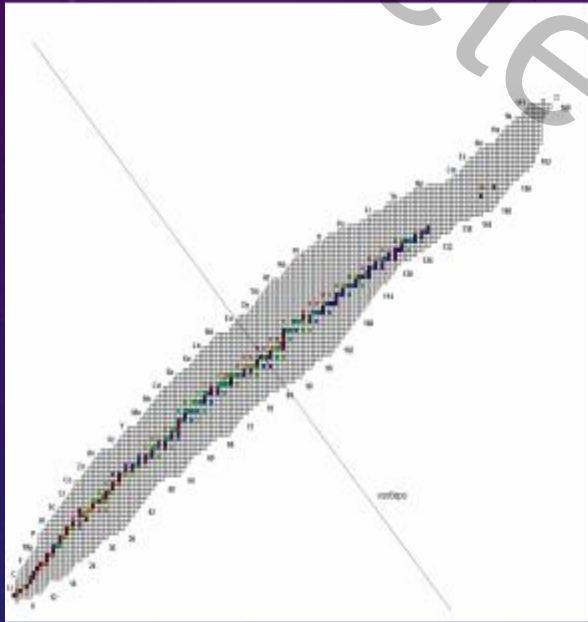
(Z=43, A=146)



A=145, најстабилнији је $Z=^{145}\text{Nd}$,
 ^{145}Pm ($t_{1/2}=17, 7 \text{ y}$)

A=147, најстабилнији је $Z=^{147}\text{Sm}$,
 ^{147}Pm ($t_{1/2}=2,62 \text{ y}$)

Долина стабилности



МОДЕЛ ОБЈАШЊАВА

- Понашање неких језгара у побуђеном стању
- Стабилност у изобарним серијама
- Постојање одређених стања вибрација језгра која доводе до његовог распада фисијом.
- Даје основу за израчунавање енергије везе нуклеона у језгру

ШТА НЕ МОЖЕ ДА ОБЈАСНИ МОДЕЛ ТЕЧНЕ КАПИ?

- Особине језгара са малим бројем нуклеона
- Магичне бројеве
- Енергије честица емитованих при радиоактивном распаду
- Магнетни момент језгра

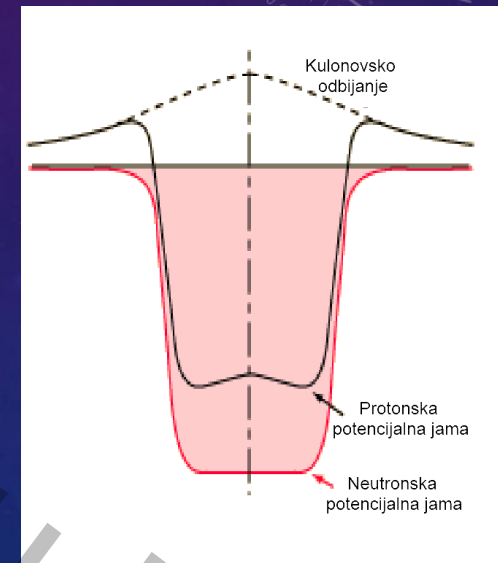
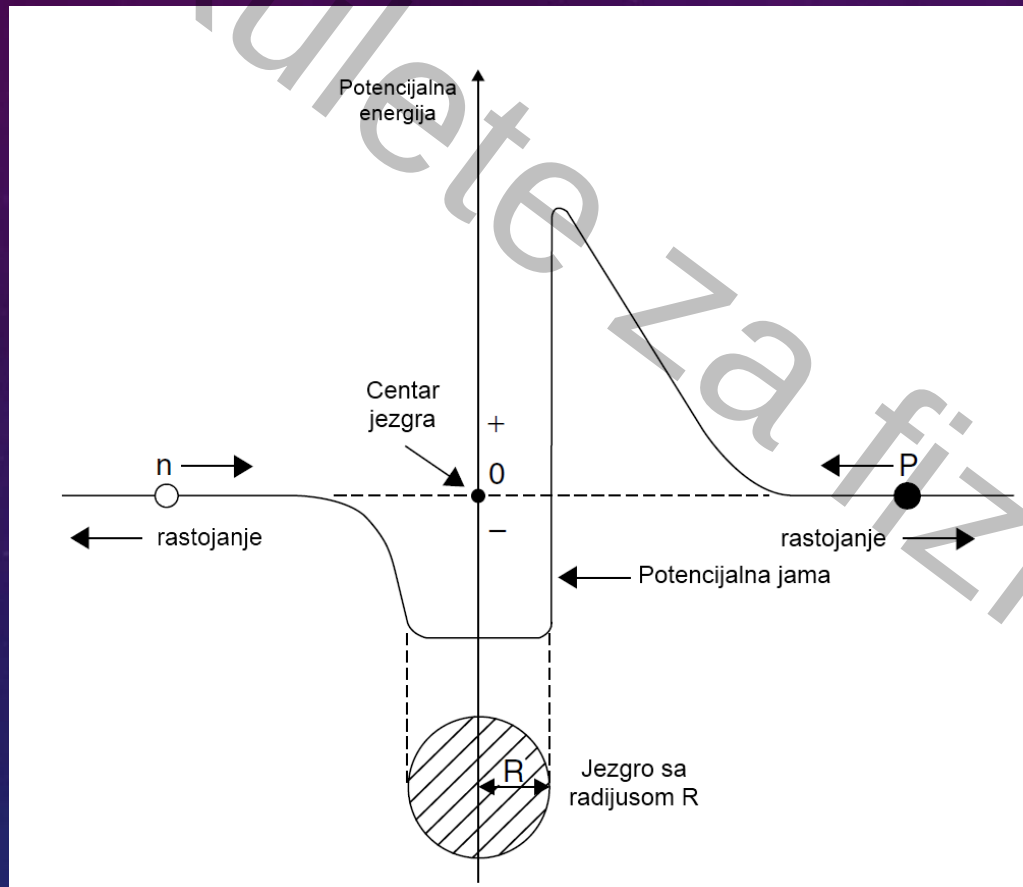
ОСОБИНЕ НУКЛЕАРНИХ СИЛА

- Кратак домет
- Показују сатурацију
- На веома кратким растојањима ($\leq 0,5 \text{ fm}$) имају одбојни карактер
- Зависност од спина
- Независност од наелектрисања

МОДЕЛ ЉУСКЕ

- *Mainstream* модел
- Многе колективне и појединачне особине атомског језгра могу се предвидети ако се претпостави да се нуклеони који се крећу у потенцијалној јами (сличан третман као за електроне у атому). Али...
- облик потенцијалне је различит од оне за електроне и немогуће га је тачно формулисати због тога што не познајемо облик нуклеарних сила.
- О њима знамо:
- Кратког су домета $\sim 1 \text{ fm}$
- Показују сатурацију
- Тенденција да се протони налазе углавном у централном делу језгра

КАКАВ ТРЕБА ДА ЈЕ ОБЛИК ПОТЕНЦИЈАЛНЕ ЈАМЕ?

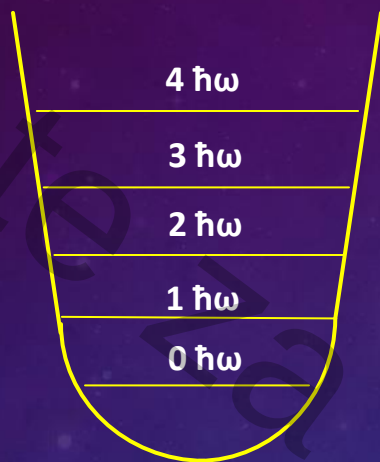


❑ Посебне потенцијалне јаме за протоне и неутроне

АПРОКСИМАЦИЈЕ ОБЛИКА ПОТЕНЦИЈАЛНЕ ЈАМЕ

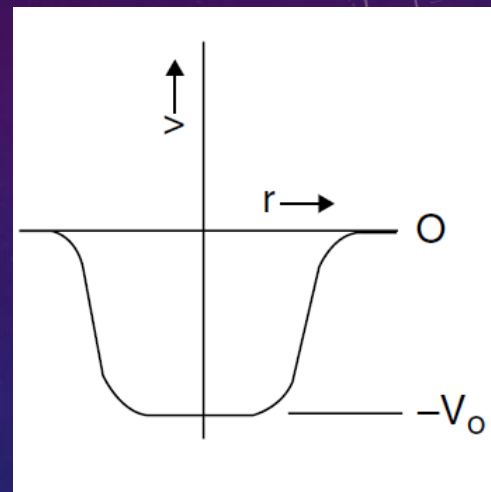


Правоугаона
потенцијална
јама



$$V(r) = V_0 + \frac{1}{2} M \omega^2 r^2$$

Потенцијал
хармонијског
осцилатора



$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + e^{(r-R)a}}$$

Woods-Saxon
отенцијал

Решење Шредингерове једначине

$$E(\text{nucleon}) = \hbar \left(2 U_0 / m r^2 \right)^{1/2} [2(n-1) + l]$$

$V_0 \approx 57 \text{ MeV}$
 $a \approx 0,65 \text{ fm}$

- Wood-Saxon-ov potencijal predstavlja usrednjenu potencijalne jame za protone i neutrone

- Потенцијална јама за протоне

$$U_{0p} = U_0 + \frac{N - Z}{A} V_1$$

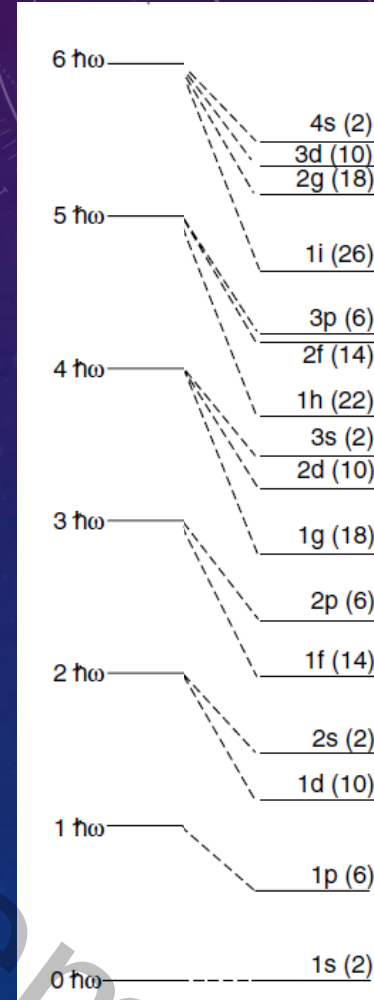
- Потенцијална јама за неутроне

$$U_{0n} = U_0 - \frac{N - Z}{A} V_1$$

- $V_1 = -30 \text{ MeV}$

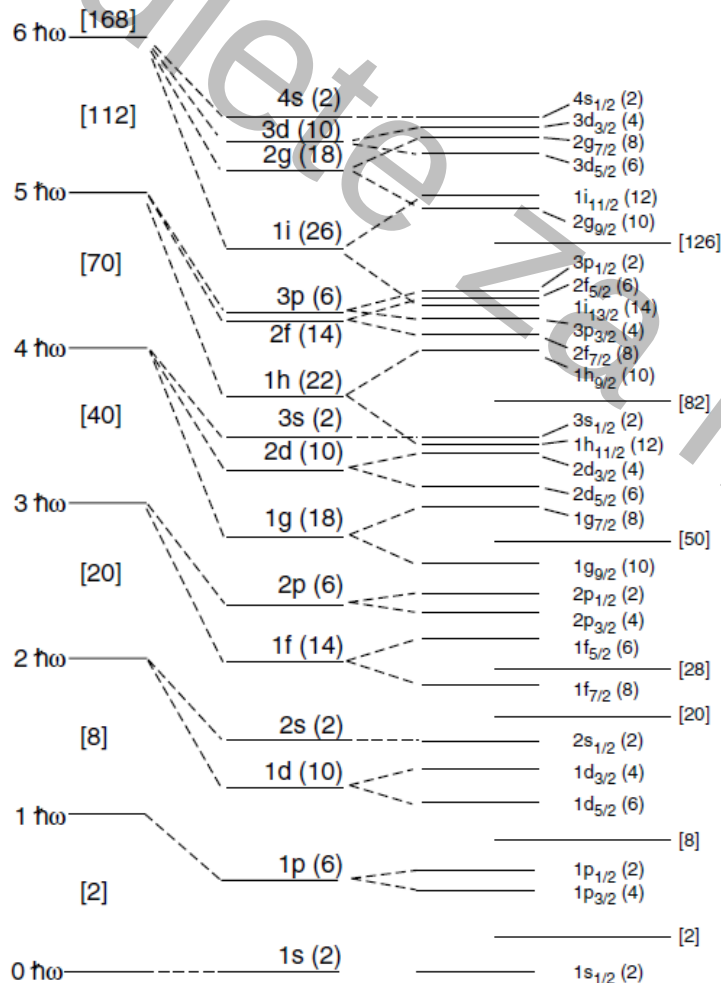
Квантни бројеви- правила

- n – радијални квантни број
- l – орбитални квантни број
- Квантни број l узима позитивне целобројне вредности $N, N-2, N-4$ где је N квантни број хармонијског осцилатора почевши од нуле, независно од вредности квантног броја n
- енергија стања са квантним бројем l расте са порастом n
- нуклеони заузимају најниже вредности енергија дате једначином



$$E(\text{nucleon}) = \hbar(2 U_0/mr^2)^{1/2} [2(n-1) + l]$$

СА КОРЕКЦИЈОМ НА СПИН-ОРБИТАЛНО СПРЕЗАЊЕ



Nl_j , парност + или -

- При попуњавању орбитала нуклеона важи Паулијев принцип.
- Пошто су различите потенцијалне јаме та протоне и неутроне њихови нивои се независно попуњавају.
- За разлику од попуњавања атомских орбитала електронима:
 - не важи Хундово правило
 - орбитале са већом вредношћу j имају нижу енергију

ПРИМЕР ПРИМЕНЕ МОДЕЛА ЛЪУСКЕ НА ЈЕЗГРУ ${}^7\text{Li}$

- Како распоредити три протона и четири неутрона

- $(1s_{1/2})^2 (1p_{3/2})^1$ протони

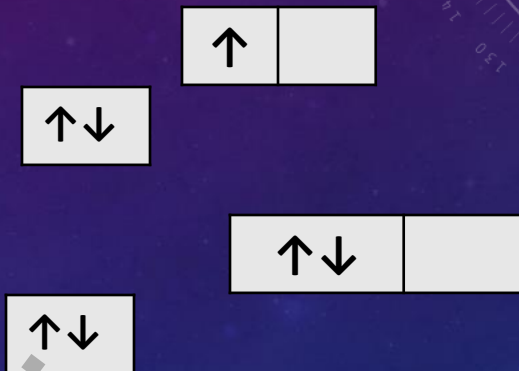
- $(1s_{1/2})^2 (1p_{3/2})^2$ неутрони

- $s=1/2, j=3/2, \pi=-$

- Ексцитована стања ${}^7\text{Li}$?

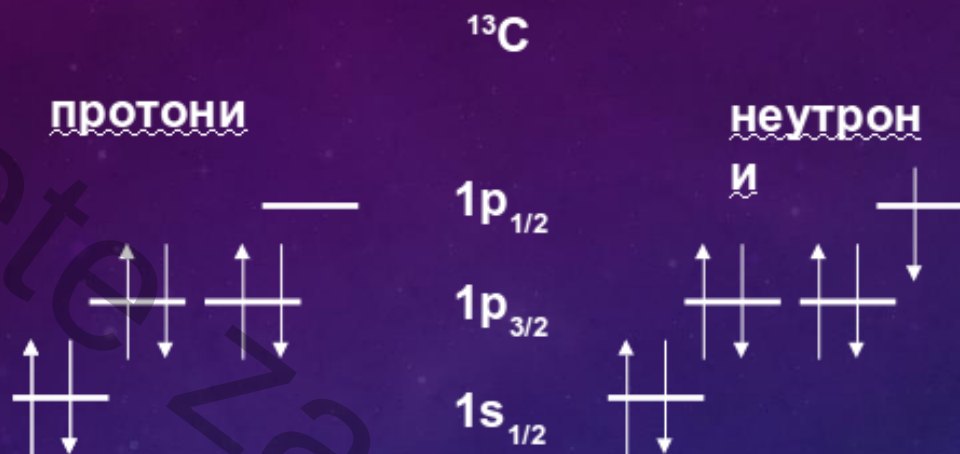
- протон из $(1p_{3/2})^1 \rightarrow (1p_{1/2})^1$

- неутрон из $(1p_{3/2})^2 \rightarrow (1p_{1/2})^1$



дозвољен

ПРЕДИКЦИЈА СПИНА ЈЕЗГРА ЗА ПАРНО-НЕПАРНА И НЕПАРНО-ПАРНА ЈЕЗГРА



$$I=1/2, \pi=-$$

$^{51}\text{V} (Z=23)$

$$I=7/2, \pi=-$$

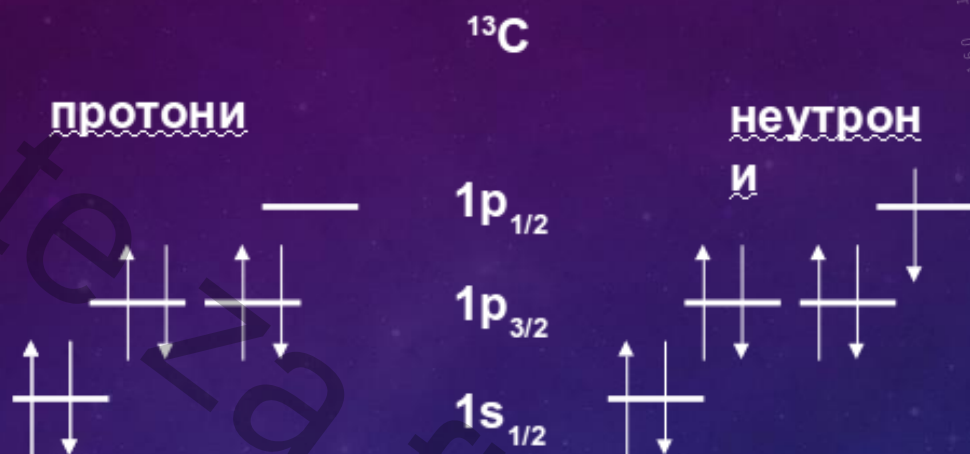
протони $1s_{1/2}(2) 1p_{3/2}(4) 1p_{1/2}(2) 1d_{5/2}(6) 1d_{3/2}(4) 2s_{1/2}(2) 1f_{7/2}(\uparrow\downarrow \uparrow)$

неутрон $1s_{1/2}(2) 1p_{3/2}(4) 1p_{1/2}(2) 1d_{5/2}(6) 1d_{3/2}(4) 2s_{1/2}(2) 1f_{7/2}(8)$

и

Спарени нуклеони не утичу на укупан спин језгра

Спин језгра одговара спину стања у ком се налази неспарени нуклеон



$$I=1/2, \pi=-$$

$^{51}\text{V} (Z=23)$

$$I=7/2, \pi=-$$

протони $1s_{1/2}(2) 1p_{3/2}(4) 1p_{1/2}(2) 1d_{5/2}(6) 1d_{3/2}(4) 2s_{1/2}(2) 1f_{7/2}(\uparrow\downarrow \uparrow)$

неутрон
и $1s_{1/2}(2) 1p_{3/2}(4) 1p_{1/2}(2) 1d_{5/2}(6) 1d_{3/2}(4) 2s_{1/2}(2) 1f_{7/2}(8)$

Спарени нуклеони не утичу на укупан спин језгра

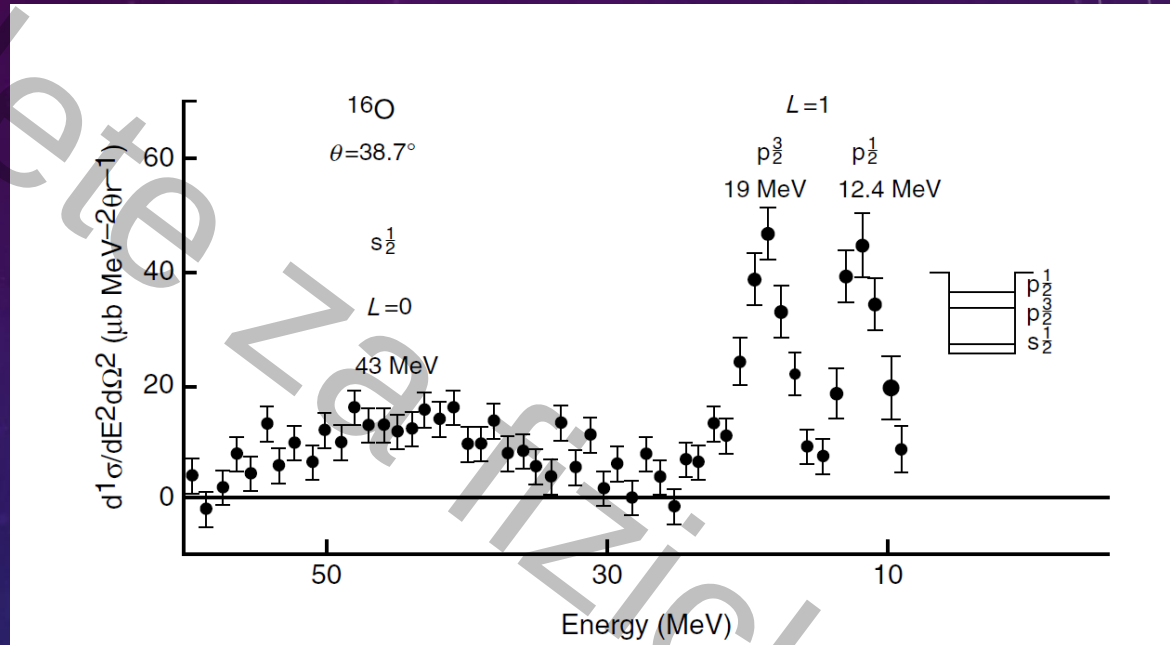
Спин језгра одговара спину стања у ком се налази неспарени нуклеон

ПРЕДИКЦИЈА СПИНА ЈЕЗГРА ЗА НЕПАРНО-НЕПАРНА

- Brennan – Bernstein правила ($20 < A < 120$)
- Ако се неспарени протони налазе у стању честице или шупљине
- $j_p + j_n + l_p + l_n = \text{паран број}$ $\rightarrow I = |j_p - j_n|$
- $j_p + j_n + l_p + l_n = \text{непаран број}$ $\rightarrow I = |j_p \pm j_n|$
- за непарно-непарна језгра $A < 20$ $\rightarrow I = |j_p + j_n|$
- Уколико се један од неспарених нуклеона налази у стању шупљине, а други у стању честице укупан спин је:

$$I = j_p + j_n - 1$$

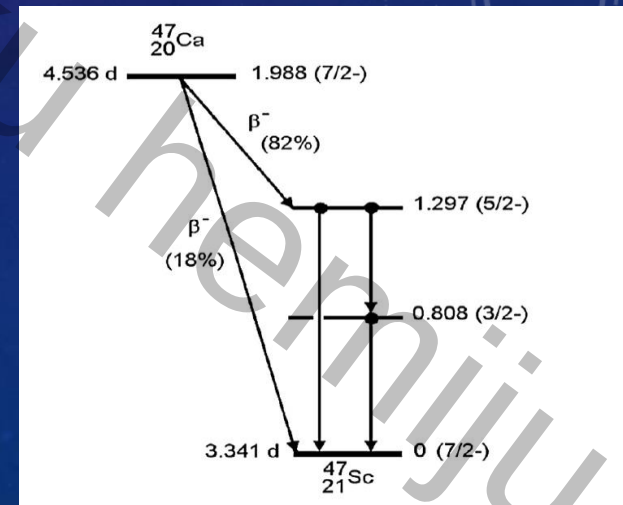
Експериментална потврда важења модела за ^{16}O : (p,2p) реакција



$1p_{1/2}$			$\uparrow\downarrow$
$1p_{3/2}$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	
$1s_{1/2}$	$\uparrow\downarrow$		

НЕДОСТАЦИ МОДЕЛА ЉУСКЕ

- Потенцијал језгра није сферно симетричан (сем за језгра са магичним бројевима) пошто то нису увек ни дистрибуција масе ни дистрибуција нелектрисања
- Енергије нивоа се донекле разликују од експериментално одређених
- Лоше предвиђање вредности магнетних момената језгра
- Немогућност превиђања квадруполних момената
- полних момената



ОДСТУПАЊЕ МАГНЕТНИХ МОМЕНАТА

Магнетни момент нуклеона

$$\mu_i = \gamma_l L_i + \gamma_s S_i$$

$$\gamma_l^p = l\mu_0$$

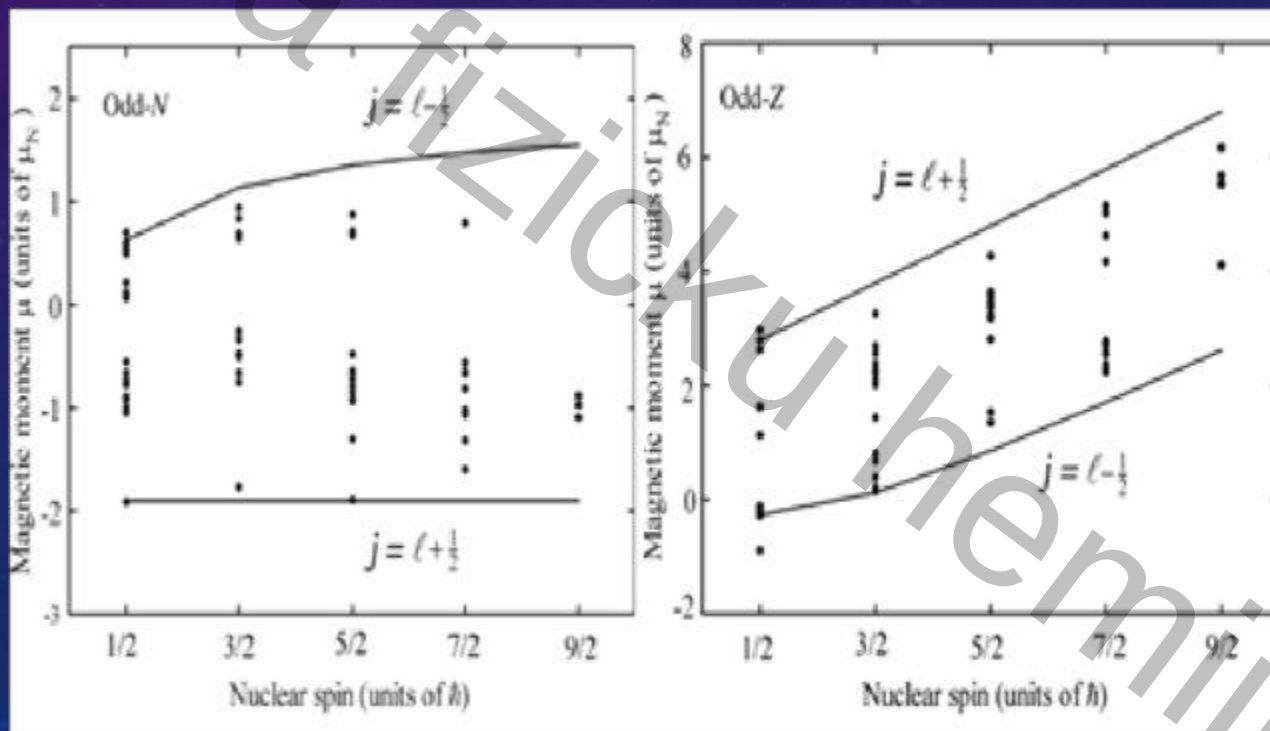
$$\gamma_s^p = 5,5845\mu_0$$

$$\gamma_l^n = 0$$

$$\gamma_s^n = -3,8263\mu_0$$

$$\mu = \begin{cases} j = l + s, & l\gamma_l + \frac{1}{2}\gamma_s \\ j = l - s, & \frac{j}{j+1} [(l+1)\gamma_l - \frac{1}{2}\gamma_s] \end{cases}$$

Шмитове границе



КОЛЕКТИВНИ МОДЕЛ ЈЕЗГРА- ВОННЕР-МОТТЕЛСЕН (1953)

- Језгро као високо-компресована течност која подлеже колективним квантираним ротацијама и вибрацијама
- Разликује четири мода колективног кретања:
 - Ротација око Z осе
 - Ротација око Y осе
 - Флуктуација између облика елипсоида и палачинке (иротација)
 - Вибрације

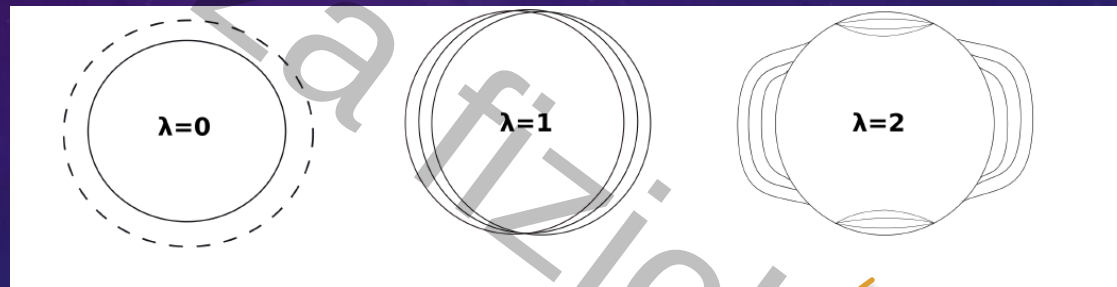


ВИБРАЦИЈЕ ПОВРШИНЕ ЈЕЗГРА И РОТАЦИЈЕ ЈЕЗГРА КАО ЦЕЛИНЕ

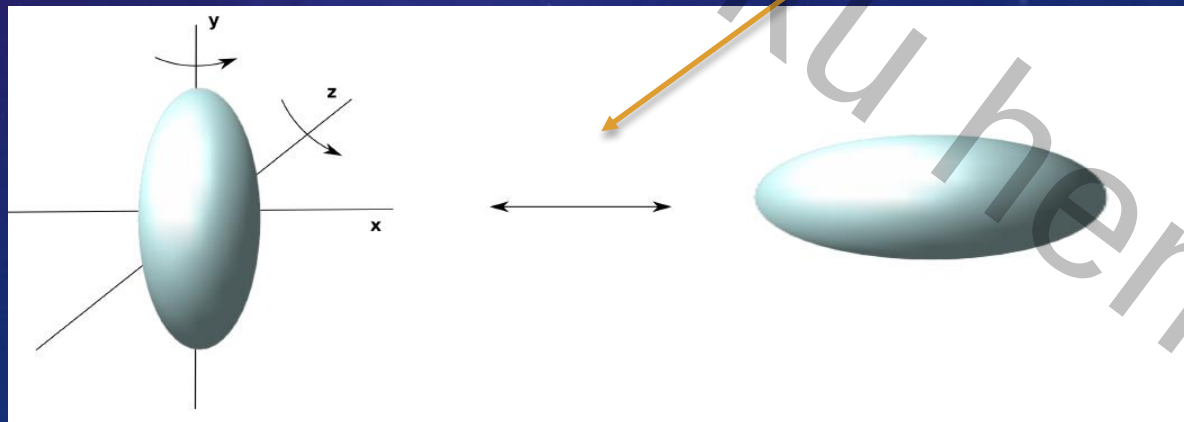
$$R(\theta, \phi, t) = R_0 \left(1 + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu}^* Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \right)$$

$$E_{rot} = \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2\mathfrak{I}}$$

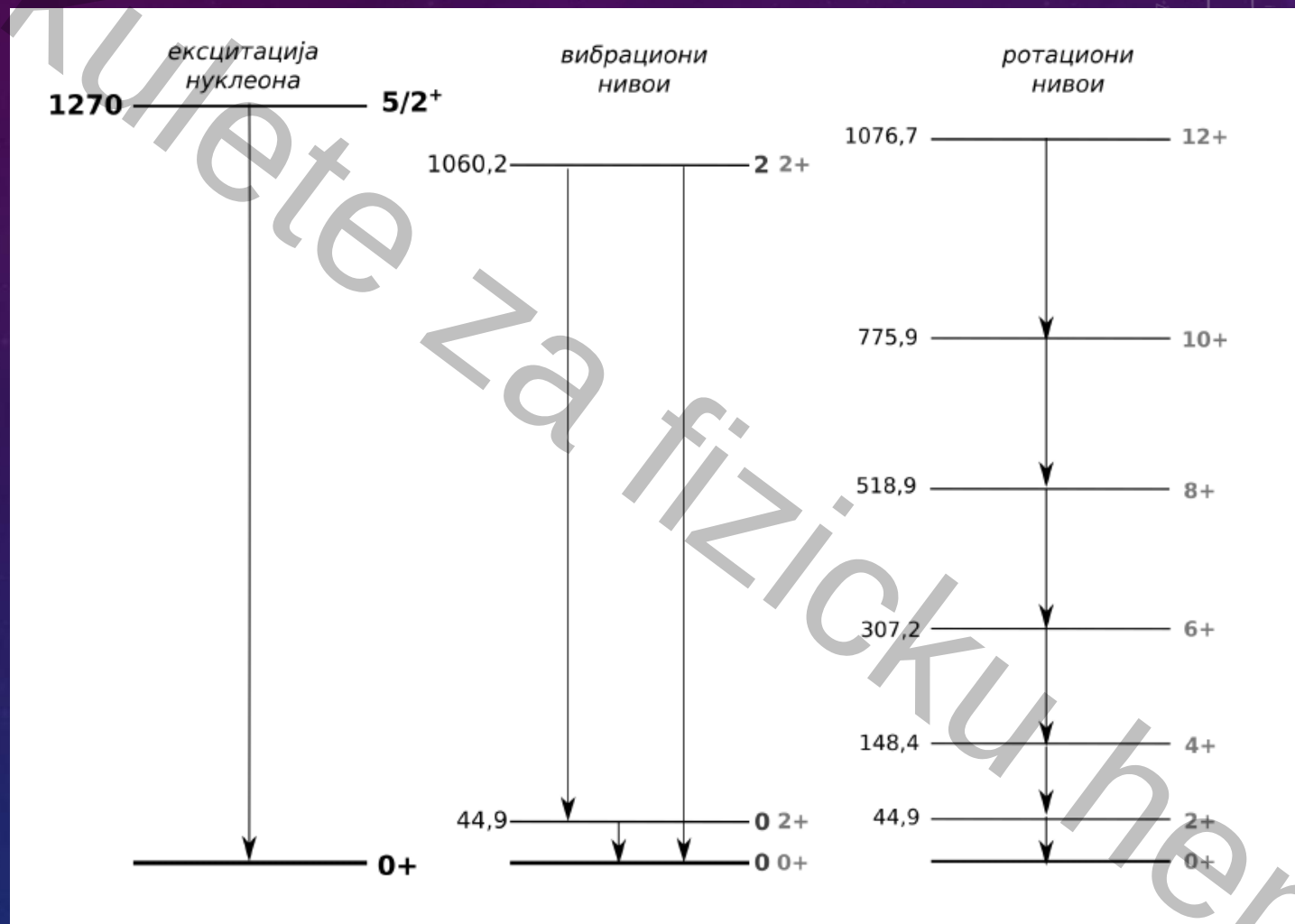
Вибрације површине језгра



ротације



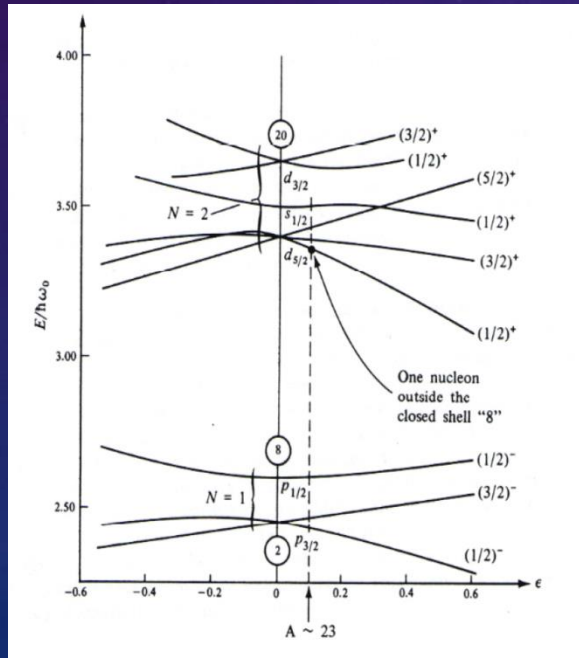
НИВОИ ЈЕЗГРА ПОСЛЕ ВОНН-МОЛТЕЛСЕН КОРЕКЦИЈЕ



^{238}U

УЈЕДИЊЕНИ МОДЕЛ ДЕФОРМИСАНОГ ЈЕЗГРА- NILSSON

- Угаони момент језгара са непарним је сума ротационог угаоног момента деформисаног језгара и угаоног момента неспареног нуклеона.
- Сваки од нивоа са укупним угаоним моментом j се цепа на два нивоа $j \pm 1/2$
- Енергија нивоа је функција параметре деформације језгара



Параметар деформације

$$\beta = 2 \frac{a - c}{a + c}$$