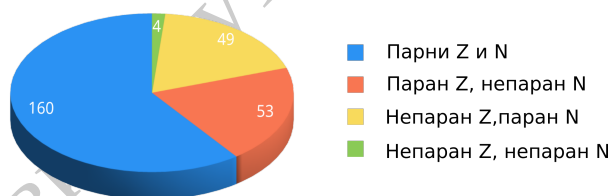


Особине атомских језгара

1.1 Стабилност језгара и енергија везивања по нуклеону

У природи постоји 255 стабилних нуклида, од чега више од половине има језгра са парним бројем протона и неутрона, док су бројеви оних са парним бројем протона и непарним бројем неутрона и обрнутим скоро једнаки (Слика 1.1). Само четири стабилна лака језгра имају непарне бројеве протона и неутрона. На основу овога се може закључити да:

- Језгра са непарним Z и N су нестабилна. Изузеци су језгра ${}^2_1\text{H}$, ${}^6_3\text{Li}$, ${}^{10}_5\text{B}$ и ${}^{14}_7\text{N}$.
- Интеракција највећим делом не зависи од типа нуклеона.
- Најстабилнија су језгра која имају парне бројеве протона и неутрона, што указује да постоји додатна стабилизација која потиче од спаривања истородних честица.



Слика 1.1: Расподела стабилних нуклида

Да би поредили језгра два нуклида по стабилности, неопходно је познавати њихове укупну енергију везивања E_v . Она зависи од броја нуклеона у језгру и њихових маса

$$E_v = -\Delta M c^2 = [M(A, Z) - (Zm_p + (A - Z)m_n)]c^2 \quad (1.1)$$

где су A масени број, Z редни број, m_p и m_n масе протона и неутрона и M експериментално измерена маса нуклида; c је брзина светлости. Израз у загради назива се **дефектом масе** ΔM ¹

$$\Delta M = [M(A, Z) - (Zm_p + (A - Z)m_n)] \quad (1.2)$$

Маса језгра нуклида је мања од збира маса његових конституената и енергијски еквивалент те разлике представља укупну енергију везивања. То значи да се при формирању језгра од

¹ У литератури се може наћи и израз $\Delta M = (Zm_p + (A - Z)m_n) - M(A, Z)$

А нуклеона мали део масе сваког од њих претвара у енергију везивања. Када би у језгру деловале само привлачне силе, додавањем нових нуклеона добијали би још стабилнија језгра, што, првенствено због присуства одбојне електростатичке интеракције између протона, није случај. Стога је погодније језгра по стабилности поредити на основу **енергије везивања по нуклеону** E_n

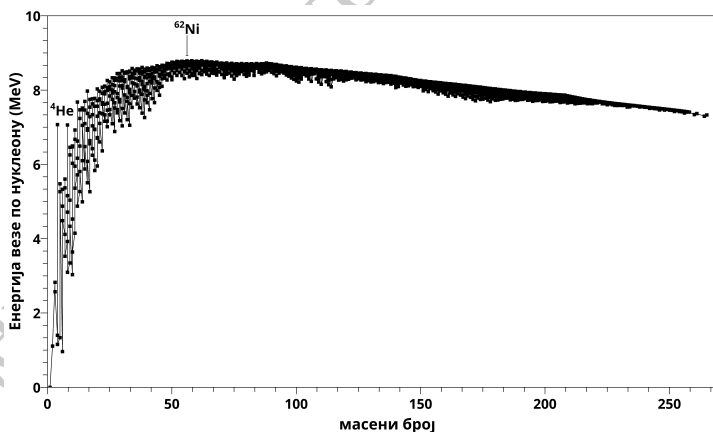
$$E_n = \frac{E_v}{A}. \quad (1.3)$$

Језгра $^{40}_{16}\text{S}$ и $^{40}_{17}\text{Cl}$ имају исти број нуклеона али се разликују по E_n ²

$$\begin{aligned} E_n(^{40}_{16}\text{S}) &= - \frac{[39,97548 - (16 \cdot 1,007825 + 24 \cdot 1,008665)] \cdot 931,5 \text{ MeV}}{40} = \\ &= \frac{333,179 \text{ MeV}}{40} = 8,329 \text{ MeV} \quad (1.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_n(^{40}_{17}\text{Cl}) &= - \frac{[39,97042 - (17 \cdot 1,007825 + 23 \cdot 1,008665)] \cdot 931,5 \text{ MeV}}{40} = \\ &= \frac{337,110 \text{ MeV}}{40} = 8,427 \text{ MeV} \quad (1.5) \end{aligned}$$

Пошто нуклид $^{40}_{17}\text{Cl}$ има већу E_n стабилнији је од $^{40}_{16}\text{S}$. Оба нуклида иначе подлежу радиоактивном распаду, при чему се $^{40}_{16}\text{S}$ β^- распадом трансформише у $^{40}_{17}\text{Cl}$.

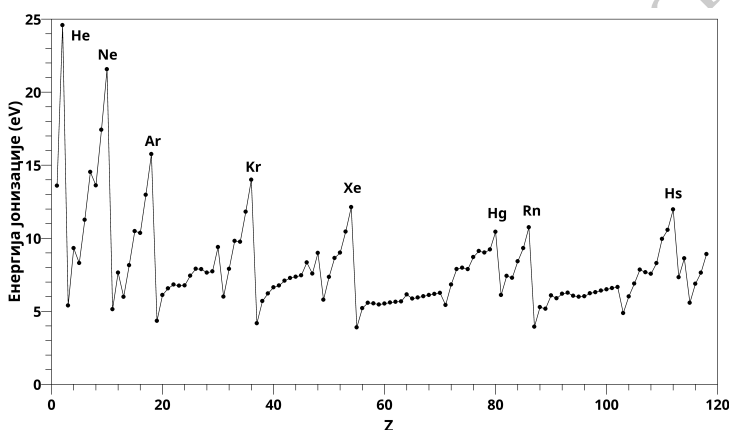


Слика 1.2: Зависност енергије везивања по нуклеону од масеног броја

Ако се E_n за познате нуклиде прикаже у функцији A добија се крива представљена на слици 1.2³. Са ње се види да је за мале вредности масеног броја зависност приближно линеарна, након чега долази до закривљења и појаве максимума на вредностима A које одговарају групи прелазних метала из групе гвожђа (максимум E_n се налази на $A = 62$ - конкретно за нуклид ^{62}Ni). Након достизања максимума крива има опадајући ток што је последица

³Извор података: Међународна атомска агенција (IAEA), база података ENSDF, <https://www-nds.iaea.org>

повећања доприноса одбојне Кулоновске интеракције између протона. Може се приметити да се за већину језгара E_n мења у релативно уском опсегу између 7,5 и 8,8 MeV, што указује на то да додавање нових нуклеона језгру повећава енергију везивања за скоро константну вредност. Поред тога, може се запазити да за одређене вредности масеног броја постоје посебно стабилни нуклиди, што се испољава као појава локалних максимума на кривој. Детаљнија анализа показује да они одговарају језгрима која имају парне бројеве и протона и неутрона, што указује на њихову посебну стабилност. Таква су језгра ${}^4_2\text{He}$, ${}^{12}_6\text{C}$, ${}^{40}_{20}\text{Ca}$ итд. Ако би тражили аналогију са другим зависностима у физици и хемији, најсличнија би била она која повезује (прву) енергију јонизације елемената периодног система и редни број елемента⁴ (Слика 1.3). Максимуми се на овој зависности налазе на парним вредностима Z које одговарају племенитим гасовима, који имају потпуно попуњене електронске љуске - односно имају такозване конфигурације **магичних бројева**. Ово нам указује на могућност постојања сличних конфигурација магичних бројева нуклеона у посебно стабилним језгрима⁵. Додатни увид у стабилност нуклида може нам дати таблица нуклида (још се назива



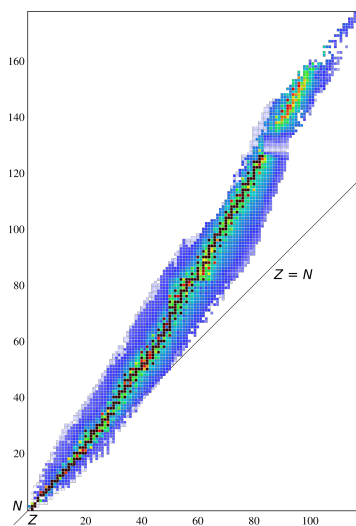
Слика 1.3: Зависност прве енергије јонизације од редног броја елемента

Сегреовим дијаграмом, према италијанском научнику Емилиу Сегреу) на слици 1.4, на којој су у облику дијаграма дати бројеви протона и неутрона за до сад познатих нуклида (како стабилних тако и радиоактивних). На њој су коцкама представљени појединачни нуклиди, тако да се у редовима налазе изотони, а у врстама нуклиди истог редног броја⁶. Квадрати који представљају стабилне нуклиде имају црну боју, док су остали, у зависности од времена полураспада дати нијансама сиве боје. Из таблице се види да су за ниске вредности редног броја најстабилнији нуклиди са једнаким бројем протона и неутрона, да би се касније однос променио у корист неутрона. Максимални однос N/Z се јавља код најтежих нуклида и приближно износи 1,4. Објашњење за ово одступање лежи у чињеници да са порастом редног броја расте и електростатичко одбијање унутар језгра. Пораст броја неутрона доприноси повећању само енергије везивања и на тај начин ублажава дестабилишући ефекат одбојних сила.

⁴Извор података National Institute of Standards and Technology (NIST) Atomic Spectra Database Ionization Energies, <https://physics.nist.gov/PhysRefData/ASD/ionEnergy.html>

⁵Магични бројеви протона и неутрона су 2, 8, 20, 28, 50 и 82; поред ових за неутроне се јавља и магични број 126

⁶У стандардној табlici на оординати се налази редни број, а апсциси број неутрона. Варијанта која је овде употребљена служи за сагледавање промене односа броја неутрона и протона за порастом Z



Слика 1.4: Зависност енергије везивања по нуклеону од масеног броја

1.1.1 Енергија издвајања нуклеона

Релативну стабилност неког радионуклида можемо процењивати и на основу величине коју називамо **енергијом издвајања нуклеона** S_A . Она представља енергију коју је потребну довести нуклеону да би напустио језгро и могуће је израчунати преко маса нуклида из ког се врши издвајање и оно који настаје. На пример, енергију неопходна за издвајање неутрона из $^{40}_{20}\text{Ca}$ је:

$$\begin{aligned} S_n(^{40}_{20}\text{Ca}) &= [(M(^{39}_{20}\text{Ca}) + m_n) - M(^{40}_{20}\text{Ca})] \cdot 931,5 \text{ MeV} = \\ &= (38,97071 + 1,008665 - 39,96259) \cdot 931,5 \text{ MeV} = 15,635 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (1.6)$$

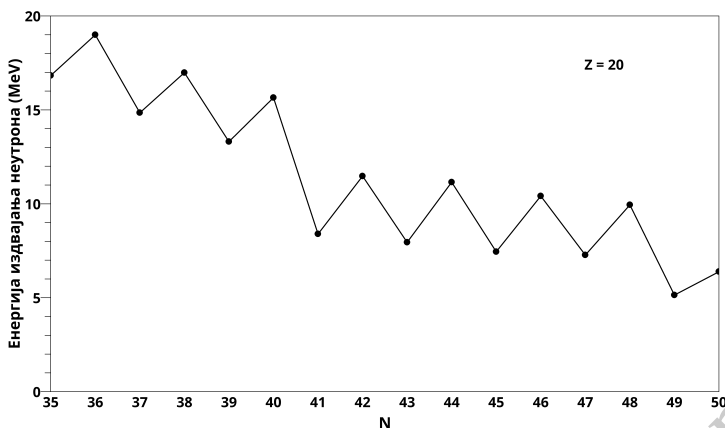
док је за $^{41}_{20}\text{Ca}$

$$\begin{aligned} S_n(^{41}_{20}\text{Ca}) &= [(M(^{40}_{20}\text{Ca}) + m_n) - M(^{41}_{20}\text{Ca})] \cdot 931,5 \text{ MeV} = \\ &= (39,96259 + 1,008665 - 40,96228) \cdot 931,5 \text{ MeV} = 8,546 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

На слици 1.5 дате су енергије издвајања неутрона за изотопе калцијума. Може се видети да је S_n за изотопе са парним бројем већа од оне са парним бројем неутрона. Сличну зависност би добили за енергију издвајања протона (наравно тада је на апциси Z).

1.1.2 Број стабилних изотопа елемената у близини магичног броја протона

Посебну стабилност нуклида са магичним бројевима нуклеона потврђује и велики број стабилних изотопа елемената чији редни број одговара магичном броју протона. Тако калцијум ($Z=20$) има 6, калај ($Z=50$) чак десет, док олово ($Z=82$) има четири стабилна изотопа. Са друге стране, њихови суседи у периоди са редним бројем $Z+1$ или $Z-1$ имају један или максимално два стабилна изотопа.



Слика 1.5: Энергија издвајања неутрона за изотопе калцијума. Подаци преузети из Audi et al. *Nucl Phys A*, 729(2003), 337–676.

1.2 Полупречник и густина језгра

У првој апроксимацији језгро нуклида можемо представити сфером константне густине $\rho(R)$ чији је полупречник R . Запремина сфере расте пропорционално са бројем нуклеона па се она може представити изразом:

$$V = a_n \cdot A \quad (1.8)$$

где је са a_n означена константа пропорционалности. Ако искористимо израз за запремину сфере добијамо:

$$R = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} a_n A} = r_0 A^{\frac{1}{3}}. \quad (1.9)$$

Величина r_0 назива се константом радијуса и износи 1,4 fm. Густину језгра можемо изразити као:

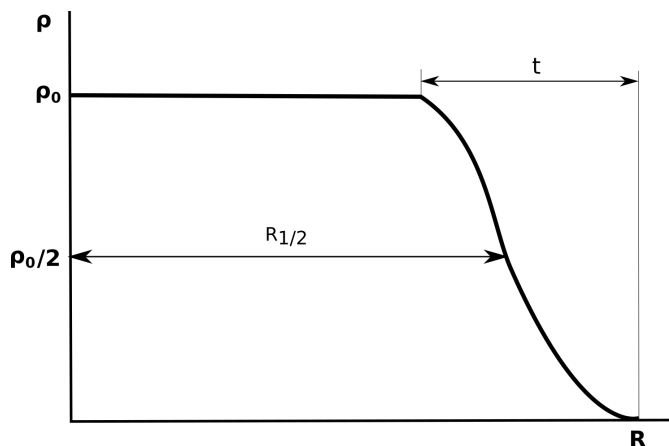
$$\rho(R) = \frac{M}{V} = \frac{A \cdot amu}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 A} = \frac{3 \cdot 1,6606 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{4\pi \cdot 1,4^3 \text{ fm}^3} \approx 3,2 \cdot 10^{17} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (1.10)$$

где је са m_a означена средња вредност маса протона и неутрона. Изузетно велика вредност густине материје у језгру указује на постојање изузетно снажних привлачних сила између нуклеона које имају кратак домет.

Међутим, експерименти са расејањем нуклеона, указују да у језгру постоје регион константне густине и регион у коме густина опада са растојањем. Стога се промена густине језгра са полупречником боље апроксимира Фермијевом расподелом

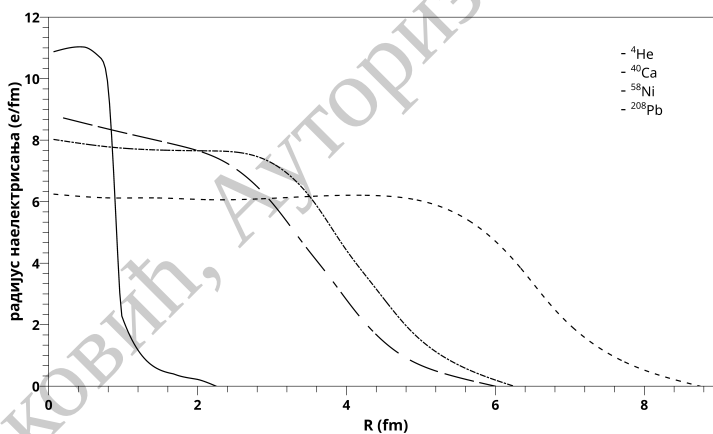
$$\rho(R) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{R - R_{1/2}}{a}}}. \quad (1.11)$$

где је ρ_0 константна густина, $R_{1/2}$ растојање између центра језгра и позиције на којој густина у језгру опадне на $\rho_0/2$, док је a параметар дифузивности језгра. Изглед Фермијеве расподеле дат је на слици 1.6. Са t је означено растојање за које густина опадне од ρ_0 до $\rho_0/2$, док се одговарајући регион језгра назива **љуском језгра**. Параметри t и a су повезани релацијом $t = 4,4a$. За већину језгара дебљина љуске је између 2,4 и 2,5 fm. Стога код лаких језгара



Слика 1.6: Фермијева расподела густине у језгру

љуска чини значајнији удео у запремини језгра него код тежих језгара. На слици 1.7 дата је расподела густине за неколико језгара на којој се овај ефекат лако уочава.



Слика 1.7: Расподела густина наелектрисања за нека језгра

1.3 Квадруполни електрични момент и облик језгра

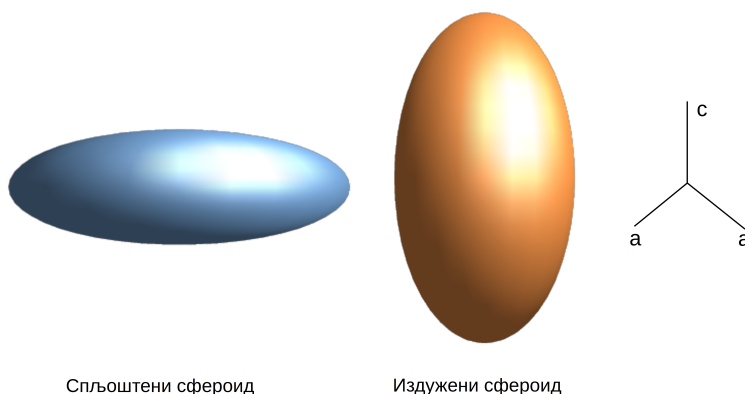
Експерименталним мерењим је установљено да већина језгара има електрични квадруполни момент Q различит од нуле, што указује да дистрибуција наелектрисања и сам облик језгра немају сферну симетрију. Тако језгра могу имати облик спљоштеног ($Q < 0$) или издуженог ($Q > 0$) сфероида (Слика 1.8), док она сам магичним бројевима нуклеона имају сфери-

чан облик. На основу вредности Q могуће је израчунати димензије језгра на основу релација

$$Q = \frac{2}{5} Ze (a^2 - c^2) \quad (1.12)$$

$$R^2 = \frac{1}{2} (a^2 + c^2) \approx \left(r_0 A^{\frac{1}{3}} \right)^2 \quad (1.13)$$

где је R средњи квадратни полупречник сфероида који одговара класичном полупречнику језгра. Решавањем овог система једначина добијају се вредности оса сфероида a и c . Највеће вредности квадруполног момента, односно највећа одступања од сферног облика су карактеристична за лантаноиде и актиноиде (о разлозима ће бити речи у одељку 2.2).



Слика 1.8: Облици језгара - спљоштени и издужени сфероид.

1.4 Спин и магнетни момент језгра

Израђивачке јединице језгра - протони и неутрони су фермиони и имају спин $\frac{1}{2}\hbar$. Спину нуклеона је придружен магнетни момент са којим је повезан релацијом $\vec{\mu} = \gamma \vec{S}$ и преко чијег експерименталног мерења је могуће одредити укупан спин језгра I . Мерења су показала да је I код парно-парних језгара укупан спин једнак нули, непарно-непарна целобројан спин, док напарно-парна (и парно-непарна језгра) имају полубројан спин. Тако је спин ${}^2\text{H}$ једнак јединици, док ${}^4\text{He}$ не поседује спин. Ово указује да у језгру постоји постоји спаривање између истог типа нуклеона. Детаљније о укупном спину језгра и правилима за његово израчунавање за различите типове језгара биће више речи у одељку 3.2.

1.5 Општи закључци о стабилности језгара

- Интеракција између нуклеона је кратког домета и показује засићење.
- Језгра са парним Z и N су стабилнија од језгара са непарним бројем нуклеона. Језгра са непарним Z и N су нестабилна (уз неколико изузетака).
- Постоје посебно стабилна парно-парна језгра са магичним Z и N .
- Језгра су стабилисана спаривањем истог типа нуклеона.

- Расподела густине нуклеона и наелектрисања у језгру за већину језгара није сферно симетрична. Изузетак су језгра са магичним бројевима Z и N .



М. Даковић, Ауторизована скрипта

Модели атомских језгара

2.1 Модел течне капи

Модел течне капи је 1929. године предложио Џорџ Гамов (George Gamow / Георгий Антонович Гамов) претпостављајући да је атомско језгро састављено од алфа-честица (за које је претпоставио да се састоје од не више од три протона и електрона)¹ и да су интеракције у језгру сличне онима код течне капи. Као заједничке карактеристике на којима је заснован овај модел навео је нестишљивост и хомогеност дистрибуције материје и наелектрисања у језгру, кратак домет и сатурацију коју показују привлачне силе између конституената и постојање површинског напона (изграђивачки елементи на површини интерагују само оним из унутрашњости што резултује тежњом да да језгро заузме облик сфере). На основу тога Гамов је енергију језгра је представио као збор доприноса енергије везивања између конституената језгра, површинске енергије и енергије Кулоновског одбијања².

$$E = -\frac{\hbar^2}{4m_\alpha r_0^2} N_\alpha^{1/3} + \frac{(2eN_\alpha)^2}{r_0} N_\alpha^{1/3} \quad (2.1)$$

где први члан представља комбиновани допринос енергија везивања између конституената и површинске енергије, док други члан описује енергију електростатичког одбијања. У једначини N_α представља број алфа честица од којих језгро изграђено, док је m_α маса алфа честице. Параметар r_0 је већ дефинисан у одељку 1.2. И поред погрешних претпоставки о структури атомског језгра, на основу оваквог модела течне капи је Гамов је релативно успешно предвидео енергију лаких језгара.

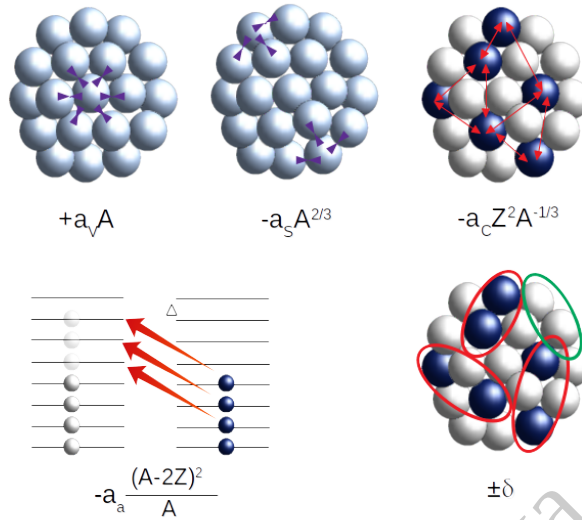
2.1.1 Бете-Вајцекерова (Bethe-Weizsäcker) емпиријска формула

На основу претпоставки модела течне капи Вајцекер (Carl Friedrich Freiherr von Weizsäcker) је 1935. године дао петочлану полуетмпиријску формулу за енергију везе језгра. Прва три члана представљају модификацију дефинисаних у Гамовљевом моделу (структура језгра је позната од 1932. године), док два преостала члана имају порекло у квантној механици.

Први члан се назива **запреминском енергијом** и потиче од енергије јаке интеракције између нуклеона која је независна од њиховог типа. У принципу, број интеракција између нуклеона једнак је $A(A-1)/2$, па је за очекивати да је запремински члан пропорционалан A^2 . Међутим, због кратког домета нуклеарне силе, нуклеон интерагује само са суседним

¹Неутрон још није био откривен. То ће учинити Чедвик 1932. године

²Енергија везивања је дата са негативним знаком.



Слика 2.1: Визуелна репрезентација чланова у Вајцекеровој једначини

нуклеонима, тако да је овај члан приближно пропорционалан A , па можемо писати да је $E_V = a_V A$, где је a_V константа.

Други члан се назива **површинском енергијом** језгра и умањује члан E_V за фактор пропорционалан броју нуклеона на његовој површини, односно површини сфере која представља језгро

$$E_S \propto \frac{4}{3}\pi R^2 \propto \frac{4}{3}\pi r_0^2 A^{2/3} = a_S A^{2/3}. \quad (2.2)$$

Трећи члан везан је за електростатичко одбијање између протона и апроксимира се потенцијалном енергијом хомогено наелектрисане сфере и умањује E_V за фактор

$$E_C = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z^2 e^2}{R} = a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad (2.3)$$

где је a_C дата као

$$a_C = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_0} \quad (2.4)$$

Четврти члан се назива **енергијом асиметрије** и он умањује енергију E_V за енергију за коју се разликују језгро са истим Z и N и језгро са истим A али са различитим бројем бројем протона и неутрона. Да би дошли до израза за овај члан, прво ћемо претпоставити да протони и неутрони заузимају посебне еквидистантне енергетске нивое и то један нуклеон по нивоу. Уколико желимо да од језгра са истим бројем Z и N добијемо оно са $N+q$ неутрона, треба q протона превести у виша неутронска стања (види слику 2.1) при чему добијамо ${}^A_{A/2-q}X^{A/2+q}$; број конвертованих протона је $q = (N-Z)/2$. Пошто је за конверзију сваког протона потребна енергија $q\Delta$, за читав процес је потребно је $q^2\Delta$, где је Δ разлика између енергетских нивоа.

$$E_A = q^2 \Delta = \frac{(N - Z)^2 \Delta}{4} \quad (2.5)$$

Растојање међу нивоима у стварности није константно, већ се смањује са порастом масеног броја, тако да Δ можемо апроксимирати са $1/A$

$$E_A = \frac{(N - Z)^2}{4A} = \frac{(A - 2Z)^2}{4A} \quad (2.6)$$

где смо N заменили са $A - Z$.

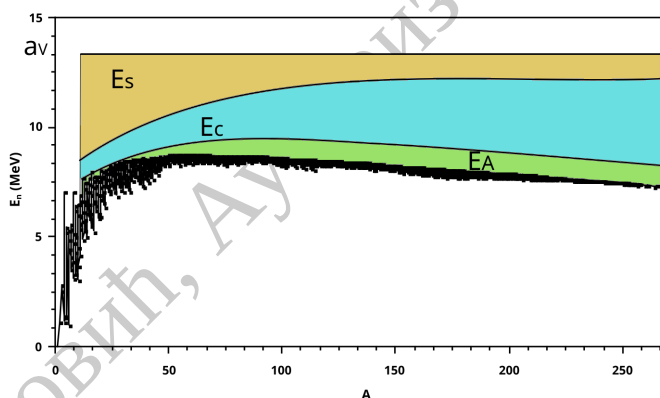
Последњи члан се назива **енергијом спаривања** и може узимати позитивне и негативне вредности

$$\begin{cases} +\delta, & N, Z = 2n \\ -\delta, & N, Z = 2n + 1 \\ 0, & A = 2n + 1 \end{cases} \quad (2.7)$$

где је $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Потпуна Бете-Вајцекерова једначина је

$$E_v = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_A \frac{(A - 2Z)^2}{A} \pm \delta \quad (2.8)$$

Вредности константи у једначини су $a_V = 15,76$, $a_S = 17,81$, $a_C = 0,711$, $a_A = 23,7$ и $\delta = 11/A^{1/2}$ MeV. Удео појединачних чланова једначине у енергији везивања по нуклеону дат је на слици 2.2. Може се уочити да Бете-Вајцекерова једначина релативно добро предвиђа криву зависности енергије везивања по нуклеону од A и да су највећа одступања (и поред корекције за спаривање) нуклиде које садрже магичне бројеве нуклеона.



Слика 2.2: Удео чланова Бете-Вајцекерове једначине у енергији везивања по нуклеону.

Предвиђање Вајцекерове формуле - израчунавање полупречника огледалских језгара

У одељку 1.1 наведен је пример два огледалска језгра $^{40}_{16}\text{S}$ и $^{40}_{17}\text{Cl}$ која имају инвертован број протона и неутрона. Уколико би смо занемарили последња два члана у Вајцекерој формули, разлика између енергија везе у језгру за два таква језгра се своди на разлику у члану E_C

$$E(Z, N) - E(N, Z) = a_C \frac{N^2 - Z^2}{A^{1/3}} = a_C A^{2/3} \quad (2.9)$$

На основу ове разлике можемо израчунати a_C , а преко ње и r_0 и R

$$R = r_0 A^{1/3} = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a_C} A^{1/3} \quad (2.10)$$

Стабилност у изобарним серијама

Бете-Вајцекерову једначину можемо искористити и за предвиђање стабилних изотопа у изобарним ($A=\text{const}$) серијама. У ту врху занемарићемо члан који се односи на спаривање нуклеона, развићемо асиметријски члан и и груписати чланове у једначини по Z

$$E_v(A, Z) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_A \left(A - 4Z + \frac{4Z^2}{A} \right) \quad (2.11)$$

$$E_v(A, Z) = A \left(a_V - a_S A^{-1/3} - a_A \right) + 4a_A Z - Z^2 \left(\frac{4a_A}{A} + \frac{a_C}{A^{1/3}} \right) \quad (2.12)$$

За $A=\text{const}$ ова једначина се може представити и као

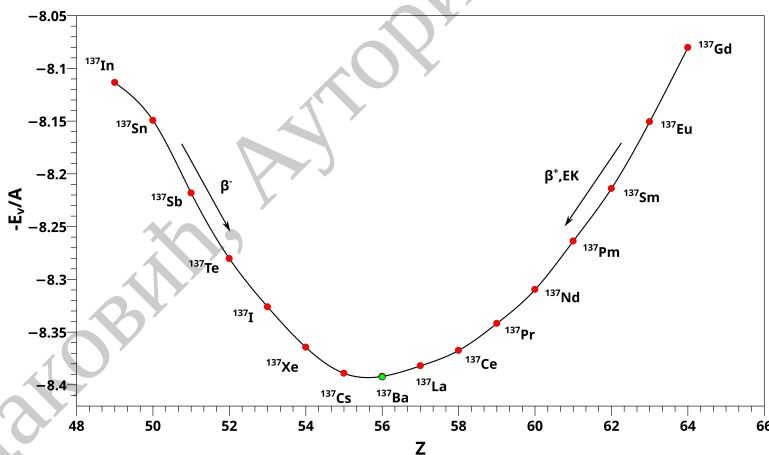
$$E_v(A, Z) = \gamma + \beta Z + \alpha Z^2 \quad (2.13)$$

где су са словима грчког алфавета означене константе уз Z . Ова функција представља параболу која има екстремум када је

$$\frac{\partial E_v(A, Z)}{\partial Z} = -2Z_{ext}\alpha + \beta = 0 \quad (2.14)$$

$$Z_{ext} = \frac{\beta}{2\alpha} = \frac{4a_A}{2 \left(\frac{4a_A}{A} + \frac{a_C}{A^{1/3}} \right)} = \frac{A}{\frac{1}{2} \left(4 + \frac{a_C}{a_A} A^{2/3} \right)}. \quad (2.15)$$

Тако је за $A=137$ $Z_{ext} \approx 56$ што одговара стабилном изотопу баријума ^{137}Ba . На слици 2.3

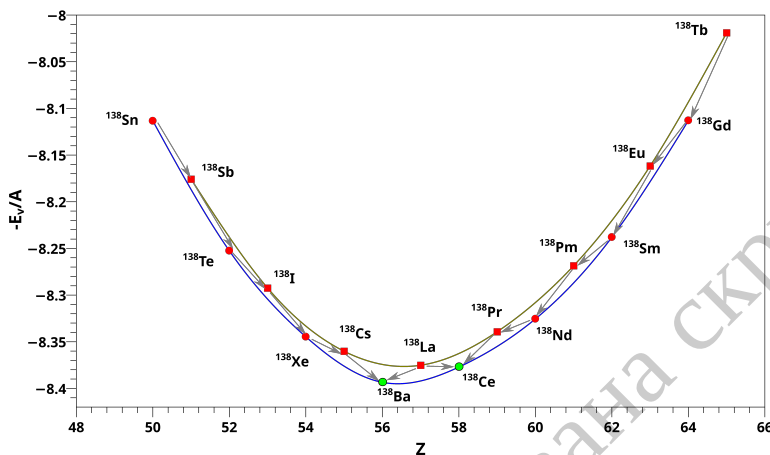


Слика 2.3: Енергија везе по нуклеону у функцији редног броја за изобарну серију $A=137$

дата је зависност енергије везивања по нуклеону у функцији редног броја за ову изобарну серију. Екстремуму параболое одговара максимална енергија везивања³ односно вредност Z за најстабилнији нуклид у серији. У случају када се ради о серији са непарним A у њој обично постоји само један стабилни изотоп. Нуклиди на левој страни параболое се трансформишу у сукцесивном низу β^- распада до ^{137}Ba , док су нуклиди са десне стране екстремума β^+ или електронским захватом и њихов низ распада такође води до овог стабилног нуклида.

³ради боље прегледности на графику је представљена негативна вредност енергије везе по нуклеону.

У случају изобарних серија са парним масеним бројевима ситуација је нешто сложенија, пошто њих могу имати нуклиди са непарно-непарним и парно-парним бројевима протона и неутрона. У овим случајевима крива $E_n = f(Z)$ се разлаже на две које одговарају овим случајевима, за шта је пример дат на слици 2.4. Крива која се односи на непарно-непарне

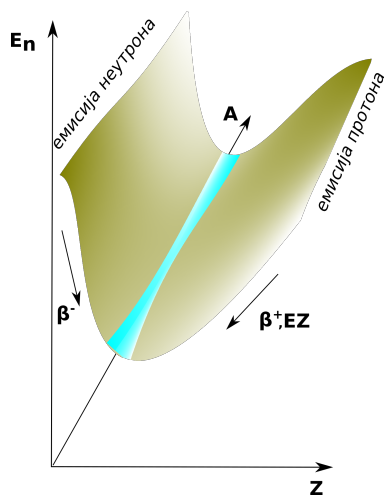


Слика 2.4: Енергија везе по нуклеону у функцији редног броја за изобарну серију A=138

нуклиде је у односу на другу померена ка вишим енергијама, сви нуклиди на њој су нестабилни и распадају се до нуклида на парно-парној кривој. Радионуклид који се налази у минимуму горње криве се углавном има два модалитета распада - β^- и β^+ , какав је и случај са ¹³⁸La. Ветикално растојање између кривих одговара енергији спаривања, која није узета у обзир при извођењу израза за Z_{ext} . Ако би конструисали криве за све изобарне серије и представили их у облику тродимензионалног дијаграма $E_n = f(Z, A)$ добили би структуру као на слици 2.5. У дну структуре налазе се стабилни нуклиди тако да се та област назива долином стабилности чијом средином пролази крива дефинисана једначином 2.15. На левој страни ("падини") од ње налазе се β^- емитери, док се на десној налазе радионуклиди који се трансформишу β^+ распадом или електронским захватом. На самом ободу нуклиди су толико нестабилни да долази до директне емисије неутрона и протона (енгл. *drip lines*).

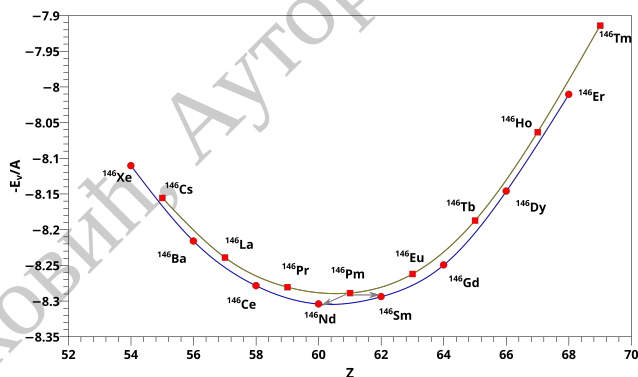
Модел течне капи и "недостајући" елементи

Међу елементима периодног система лакшим од бизмута два није могуће наћи у природи, што је последица њиховог кратког времена полураспада у поређењу са старошћу Земље. То су технецијум (Z=43, изотоп најдужега времена полураспада је ⁹⁸Tc са $4,21 \cdot 10^6$ година) и прометијум (Z=61, изотоп најдужега времена полураспада је ¹⁴⁵Pm са временом полураспада од свега 17,7 година). Овај феномен се може објаснити преко модела течне капи и то ће овде бити учињено на примеру прометијума. Полазимо до једначине 2.15 тако што ћемо израчунати ње израчунати вредност масеног броја која одговара Z=61, након чега добијамо A=146. На слици 2.6 дате је изобарна серија за ову вредност масеног броја. Као и претходном одељку, имамо две изобарне криве, при чему ¹⁴⁶Pm (време полураспада 5,3 године) припада кривој за непарно-непарна језгра и нестабилан је. Да би проверили могућност да ли је неки од других изотопа прометијума стабилан, треба да погледамо изобарне серије за



Слика 2.5: Дијаграм енергија везе по нуклеону у функцији редног броја и масеног броја

$A=145$ и $A=147^4$. За прву је најстабилнији нуклид $^{145}_{60}\text{Nd}$ и у овом изобарном ланцу се налази $^{145}_{61}\text{Pm}$, док је у другој то $^{145}_{62}\text{Sm}$ где припада и $^{145}_{61}\text{Pm}$ ($t_{1/2} = 2,62$ године)⁵. Прометијум је један од фисионих производа и може се издвојити прерадом исслуженог нуклеарног горива.



Слика 2.6: Дијаграм енергија везе по нуклеону у функцији редног броја и масеног броја

2.1.2 Предности и мане модела течне капи

Као што смо видели у претходним одељцима, на основу модела течне капи могуће је израчунавање енергије везе у језгру, предвидети стабилност нуклида у изобарним серијама и одредити полупречник огледалских језгара. Поред тога Нилс Бор (Niels Bohr) је на основу модела течне капи дао прву теорију фисије, о чему ће бити речи у одељку XX.X. Међутим,

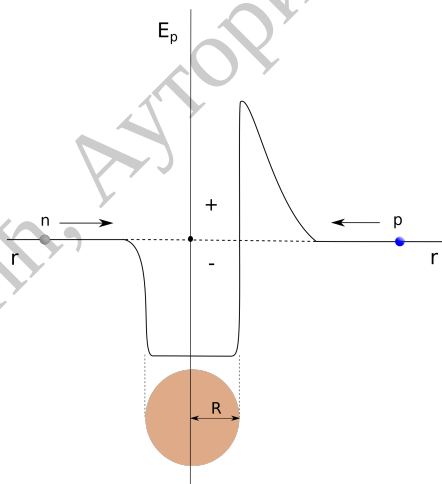
⁴Ове серије можете наћи на локацији <https://nds.iaea.org/relnsd/NdsEnsdf/masschain.html>

⁵У осталим, удаљеним серијама изотопи прометијума имају много краћа времена полураспада

овај модел не може да објасни стабилност најлакших нуклида, постојање магичних језгара, као ни да предвиди енергије честица или електромагнетног зрачења емитованог при радиоактивном распаду и промену укупног угаоног момента у њему.

2.2 Модел љуске

Модел љуске је 1949. године истовремено предложен од стране од америчке научнице Марије Геперт-Мајер (Maria Goeppert Mayer) и групе немачких научника предвођених Хансом Зусом (Hans Eduard Suess). Они су предложили да се, слично као и електрони у моделу атома, појединачни нуклеони крећу у потенцијалној јами која потиче од осталих нуклеона. Решавање Шредингерове једначине за такав систем захтева познавање облика зависности потенцијалне енергије у језгру од растојања, која се опет састоји од доприноса кулонског одбијања и јаке нуклеарне силе. Пошто тачна једначина која би описивала последњи није позната, морамо се послужити приближним (апроксимативним) моделима потенцијалне јаме. За почетак, размотрићемо формирање језгра ^{A+1}X од AX и неутрона при чему он прилази језгру неком коначном брзином (Слика 2.7). Неутрон неће "осећати" никакву интеракцију све док не дође у домен дејства нуклеарних сила, након чега бива везан у језгру. Са друге стране формирање језгра ^{A+1}Y од AX и протона, захтева да протон има кинетичку енергију довољну за савлађивање одбојне кулоновске силе (односно савлађивање потенцијалне баријере), после чега доминира привлачно дејство нуклеарних сила и долази до његовог везивања у језгру. Из овог следи да понашање протона и неутрона у језгру треба разматрати као да се налазе у одвојеним потенцијалним јамама.



Слика 2.7: Интеракције неутрона и протона при формирању језгра

Да би направили одговарајући избор потенцијалне јаме треба да размотримо неке особине нуклеарних сила (о неким је већ било речи у одељку 1.5). Оне су кратког домета и њихово дејство је ограничено на димензије језгра ⁶, показују сатурацију, на малим растојањима ($< 0,5 \text{ fm}$) имају одбојни карактер, независне су од наелектрисања и зависне су од спина. Најједноставнија апроксимација би била потенцијална јама бесконачно великих зидова (Слика 2.8а), где би ивице представљале границе језгра и при чему је потенцијална енергија унутар

⁶Тачније превазилази димензије језгра за приближно 1 fm .

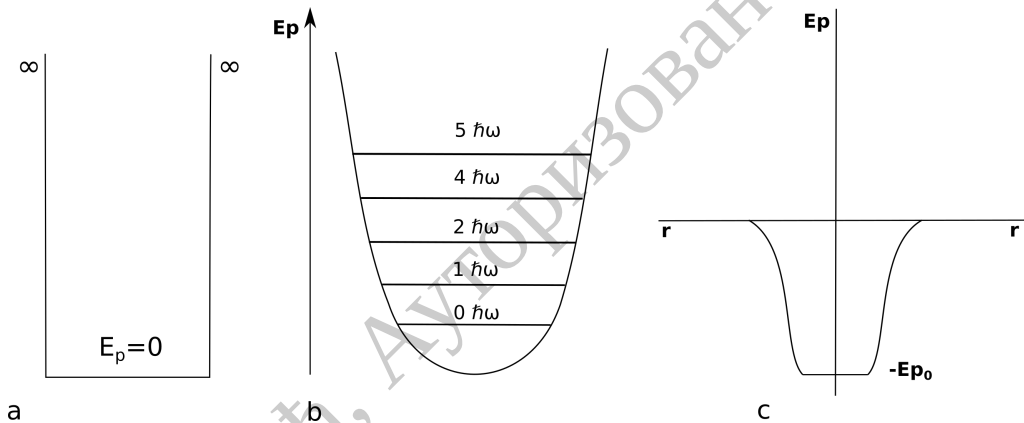
ње нула. Ово је крајње нереалистичан модел ако узмемо у обзир да је интезитет нуклеарних сила пада на нулу непосредно на ивицама језгра и зависност густине нуклеона у језгру од растојања. Потенцијална јама тродимензионалног хармонијског осцилатора (Слика 2.8б) дефинисана једначином

$$U(r) = \frac{1}{2} M \omega^2 r^2 \quad (2.16)$$

где су M маса језгра, $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$ и r растојање. Овај модел представља унапређење у односу на претходни. Уврштавањем овог израза у Шредингерову једначину добијамо еквидистантне енергетске нивое нуклеона који су дефинисани једначином

$$E_n = N \omega \hbar \quad (2.17)$$

где је N квантни број хармонијског осцилатора и може узимати вредности $0, 1, 2, \dots$, представља нешто реалистичнији модел. Овај модел се може успешно применити на само на најлакша језгра јер не узима у обзир постојање региона константне густине, односно сатурацију нуклеарних сила.



Слика 2.8: Апроксимативни модели потенцијалне енергије у језгру: а) правоугаона потенцијална јама бесконачно високих зидова, б) потенцијална јама модела линеарног хармонијског осцилатора, ц) Вудс-Саксонов потенцијал

Модел потенцијалне јаме Вудс-Саксона који је дат изразом

$$U(r) = \frac{-U_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}} \quad (2.18)$$

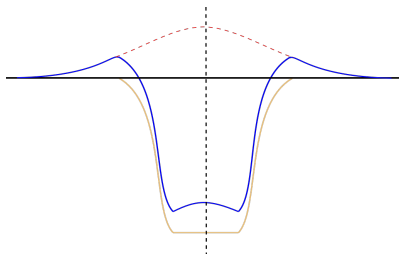
који је веома сличан изразу 1.11 који представља расподелу густине у језгру (а и r представљају исте величине као и у том изразу), док је R радијус језгра дефинисан једначином 1.9. U_0 је константа која приближно износи -57 MeV , док a има вредност приближно $0,65 \text{ fm}$. Вуд-Саксонов израз у ствари моделира усредњену потенцијалну јаму за протоне и неутроне. Потенцијална јама за протоне је због одбојне кулоновске интеракције нешто виша него она за неутроне (Слика 2.9) и дефинисана је изразом

$$U_{0p} = U_0 + \frac{N - Z}{A} V_1. \quad (2.19)$$

За нейтроне је важи

$$U_{0n} = U_0 - \frac{N - Z}{A} V_1. \quad (2.20)$$

где је V_1 константа која има вредност -30 MeV. Модел Вуд-Саксонове потенцијане јаме



Слика 2.9: Потенцијалне јаме за протоне (плаво) и нейтроне (сиво). Са испрекиданом линијом представљено је кулоновско одбијање

представља добру апроксимацију јер узима у обзир сатурацију нуклеарних сила, постојање региона са варијабилном густином и ограниченост дејства нуклеарних сила на димензије језгра. Уколико овај израз уврстимо у Шредингерову једначину

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 + U_{nukl}(r) \right) \Psi = E\Psi \quad (2.21)$$

њеним решавањем за вредности енергије нуклеона добићемо

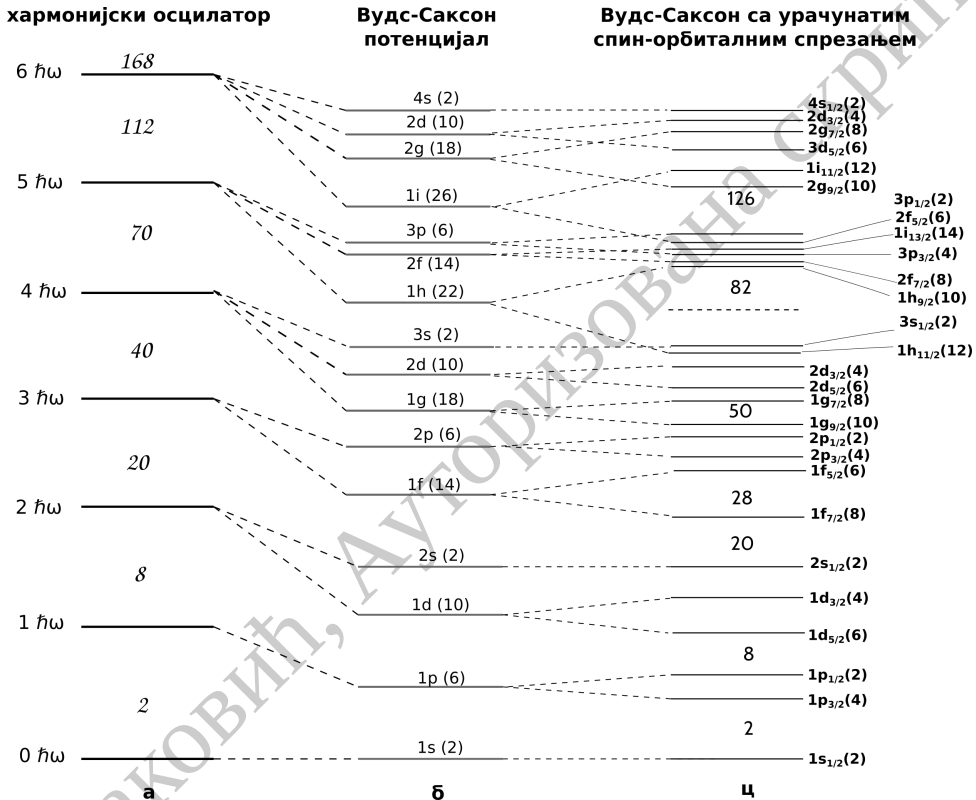
$$E(n, l) = \hbar \sqrt{\frac{2U_0}{mr^2}} [(2n - 1) + l] = N\hbar \sqrt{\frac{2U_0}{mr^2}} \quad (2.22)$$

где је U_0 потенцијална енергија када је $r=0$, m је маса нуклеона, док су n и l радијални и орбитални квантни број. За разлику од квантних бројева за електронска стања, вредност l не зависи од вредности n , већ узима вредности $N, N-2, N-4, \dots$ (који је аналоган квантном броју дефинисаном у једначини 2.17). Као и код електронских стања, вредностима квантног броја l придружујемо словне ознаке. Тако је $l=0$ приписана s орбитала (енергетско стање), $l=1$ p орбитала, $l=2$ d орбитала итд. На слици 2.10 дат је упоредни приказ енергетских нивоа нуклеона за моделе потенцијалне јаме хармонијског осцилатора (а) и Вуд-Саксона (б). Образац обележавања енергетских нивоа је nl^q где је q број нуклеона у датом нивоу. Између нивоа су дате вредности магичних бројева нуклеона који предвиђа модел љуске за одговарајућу потенцијалну јаму. Ако њих упоредимо са вредностима експериментално одређених магичних бројева (2, 8, 20, 28, 50 и 82, 126), уочавамо да је предвиђање тачно само за лака језгра. Уколико аналогно случају код електронских стања уведемо корекцију на спин-орбитално спрезање, долази до цепања сваког (са изузетком s) енергетског нивоа на два која су окарактерисана укупним угаоним квантним бројем j , при чему он може узимати вредности $l \pm s$. Тако се нпр. ниво $1d$ цепа на нивое $1d_{3/2}$ и $1d_{5/2}$ где је у субскрипту означена вредност квантног броја j (Слика 2.10ц). Након примене ове корекције предвиђање магичних бројева нуклеона се слаже са експерименталним вредностима.

Правила која важе при попуњавању енергетских стања нуклеонима су:

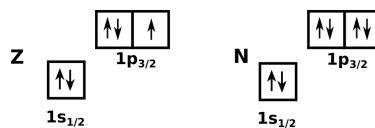
- Протони и нейтрони попуњавају засебне енергетске нивое.
- Паулијев принцип.

- Стања са већом вредношћу j имају нижу енергију.
- Предност има спаривање, односно не постоји правило аналогно Хундовом правилу за попуњавање електронских нивоа.
- У случају да се језгро састоји од непарних бројева протона и неутрона, енергијски је повољнија паралелна оријентација њихових спинова.
- Спин језгра је одређен неспареним нуклеонима.



Слика 2.10: Енергетски нивои нуклеона за моделе а) хармонијског осцилатора, б) Вуд-Саксона и ц) Вуд-Саксона са корекцијом на спин-орбитално спрезање

Као илустрацију примене ових правила узећемо нуклеонску конфигурацију језгра $^{11}_5\text{B}$



Слика 2.11: Нуклеонска конфигурација $^{11}_5\text{B}$

односно

$$\begin{aligned} Z : & \quad 1s_{1/2}^2 \quad 1p_{3/2}^3 \\ N : & \quad 1s_{1/2}^2 \quad 1p_{3/2}^4. \end{aligned}$$

Пошто су сви спинови нуклеона спарени, сем у протонском поднивоу $1p_{3/2}$ укупан спин језгра је $1/2 (\hbar)$, док је укупни угаони момент језгра $I = 3/2 (\hbar)$. Која би била нуклеонска конфигурација првог побуђеног стања $^{11}_5\text{B}$? Пошто су сви спинови неутрони спарени енергијски неповољније је да при преласку неутрона на ниво $1p_{1/2}$ дође до нарушавања спаривања, него да неспарени протон из $1p_{3/2}$ пређе у ниво $1p_{1/2}$. Дакле, тражена нуклеонска конфигурација је

$$\begin{aligned} Z : & \quad 1s_{1/2}^2 \quad 1p_{3/2}^2 \quad 1p_{1/2}^1 \\ N : & \quad 1s_{1/2}^2 \quad 1p_{3/2}^4. \end{aligned}$$

При овом прелазу укупан спин остаје непромењен, док је укупни угаони момент побуђеног језгра $1/2 (\hbar)$.

Слично као и код електронских стања, енергетским стањима нуклеона се придружује параметар парности. Он је везан за таласну функцију датог стања, т.ј. таласна функција је парна ако не мења знак при промени знака аргумента

$$\Psi(-x) = \Psi(x) \quad (2.23)$$

Такве су таласне функције стања s , d , g и она се означавају са знаком $+$. За непарне таласне функције важи

$$\Psi(-x) = -\Psi(x) \quad (2.24)$$

и оне описују стања p , f , h итд. која се означавају са знаком $-$. Укупна парност језгра одређена је парношћу стања у ком се налази неспарени нуклеон. У случају стања која садрже неспарене протони и неутроне оба $+$ или оба $-$, парност језгра је $+$. О осталим случајевима парност језгра је $-$. Одређивање укупног угаоног момента је једноставно само за лака језгра. За одређивање ових величина за непарно-непарна језгра између $20 < A < 120$ служимо се Бренан-Бернштајновим (Brennan-Bernstein) правилима.

- Уколико су се непарни протони и неутрони оба налазе или у стању честице или у стању празнине⁷ тада је укупан угаони момент језгра

$$\begin{aligned} j_p + j_n + l_p + l_n &= \text{паран број} & I &= |j_p - j_n| \\ j_p + j_n + l_p + l_n &= \text{непаран број} & I &= |j_p \pm j_n| \\ \text{за непарно-непарна језгра } A < 20 & & I &= j_p + j_n \end{aligned}$$

- Уколико се један од непарних нуклеона налази у стању шупљине, а други у стању честице тада је укупан угаони момент $I = j_p + j_n - 1$.

На пример језгро $^{34}_{15}\text{P}_{19}$ има нуклеонску конфигурацију

$$\begin{aligned} Z : & \quad 1s_{1/2}^2 \quad 1p_{3/2}^4 \quad 1p_{1/2}^2 \quad 1d_{5/2}^6 \quad 1d_{3/2}^1 \\ N : & \quad 1s_{1/2}^2 \quad 1p_{3/2}^4 \quad 1p_{1/2}^2 \quad 1d_{5/2}^6 \quad 1d_{3/2}^4 \quad 1s_{1/2}^1 \end{aligned}$$

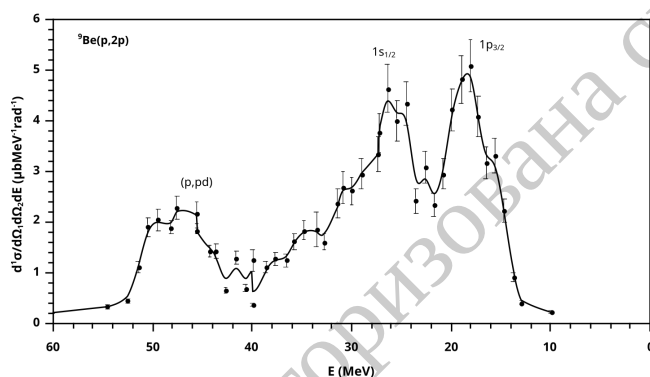
⁷Празнином се назива стање којем до попуњености недостаје један нуклеон. На пример $1f_{5/2}^5$ има последњи нуклеон у стању "празнине" што се понекад обележава са $1f_{5/2}^{-1}$

Видимо да су и неспарени протон и неспарени неутрон у стању честице тако да према наведеним правилима имамо да је $j_p + j_n + l_p + l_n = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 2 + 0 = 4$. Стога је укупан угаони момент језгра

$$I = |j_p - j_n| = \left| \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right| = 1. \quad (2.25)$$

Пошто је парност стања неспарених протона и неутрона +, то је и парност језгра ${}^{34}_{15}\text{P}^+$.

Експериментална потврда постојања енергетских нивоа (љуски) унутар језгра потиче од експеримената бомбардовања језгара брзим протонима при чему долази до реакције избацивања протона из језгра. У њима се мери зависност вероватноће избацивања протона (σ)⁸ за одређен угао између упадног и избаченог протона у функцији енергије упадних протона. На слици 2.11 дат је приказана је та зависности за реакцију бомбардовања ${}^9\text{Be}$ при чему су назначене енергије потребне за избацивање протона из одговарајућих енергетских нивоа⁹.



Слика 2.12: Вероватноћа избацивања протона у (p,2p) процесу у функцији енергије.

2.2.1 Предности и недостаци модела љуске

Модел љуске успешно предвиђа магичне бројеве нуклеона, укупан спин језгра и дискретне енергије честица¹⁰ и електромагнетног зрачења емитованих при радиоактивном распаду. Међутим, магнетни моменти језгара и побуђена стања неких (углавном тежих) језгара предвиђени на основу овог модела показују значајна одступања од експериментално одређених вредности. Магнетни момент језгра једног нуклеона једнак је збиру орбиталне и компоненте везане за спин

$$\mu_i = \gamma_i L_i + \gamma_s S_i \quad (2.26)$$

где су γ_i и γ_s жиромагнетни односи за нуклеон. За протон и неутрон жиромагнетни односи су дефинисани као

$$\gamma_l^p = l\mu_0 \quad \gamma_s^p = 5,5845\mu_0 \quad (2.27)$$

$$\gamma_l^n = 0 \quad \gamma_s^n = -3,8263\mu_0 \quad (2.28)$$

$$(2.29)$$

⁸О чему ће бити више речи у одељку о нуклеарним реакцијама

⁹Поред тога означена је и енергија потребна за избацивање једног протона и неутрона (деутерона).Подаци преузети из IAEA Exfor базе. Прекло података Tyren et al. Nuclear Physics v 7, p 10-23, 1958.

¹⁰За β распад то је максимална енергија емитованих електрона или позитрона.

где је μ_0 константа која се назива нуклеарним магнетоном.

$$\mu_0 = \frac{e\hbar}{2m_p c} \quad (2.30)$$

Ако би се руководили чињеницом да укупан спин језгра одређују неспарени нуклеони очекивали би да магнетни моменти језгра буду мале величине. Торстен Шмит (Thorsten Schmidt) је 1937. на бази модела љуске за језгра која непарно А (дакле један неспарени нуклеон) теоријски предвидео да магнетни моменти свих језгара треба да се налазе на правим линијама дефинисаним као

$$\mu = \begin{cases} j = l + s, & l\gamma_l + \frac{1}{2}\gamma_s \\ j = l - s, & \frac{j}{j+1} [(l+1)\gamma_l - \frac{1}{2}\gamma_s] \end{cases} \quad (2.31)$$

Међутим, експериментално одређене вредности магнетних момената за већину језгара налазе се у области ограниченом овим линијама (које се често називају Шмитовним линијама или лимитима), односно ниже су од оних предвиђеним горњим релацијама. Дрasticан пример је језгро $^{17}_9\text{F}$, за који је измерена вредност $\mu=4,72\mu_0$, док је предвиђена $-0,26\mu_0$. Такође, вредности магнетних момената показују висок степен варијације, што указује на комплекснију природу интеракција у језгру и да се магнетни момент спарених честица не поништавају у потпуности.

Поред овога модел љуске не може да објасни великих вредности електричног квадруплног момента код одређених језгара, постојање нискоенергетских побуђених стања код тежих језгара и њихово груписање у траке сличне онима које се јављају код ротационих нивоа молекула. Наведени недостаци модела љуске указују на постојање колективног померања нуклеона у већем броју језгара, сличног оном код молекула, које утиче на то да потенцијал језгра није централно симетричан, већ захтева модификацију која би укључивала утицај ових облика кретања.

2.3 Колективни модел - Бор Молтенсенов модел

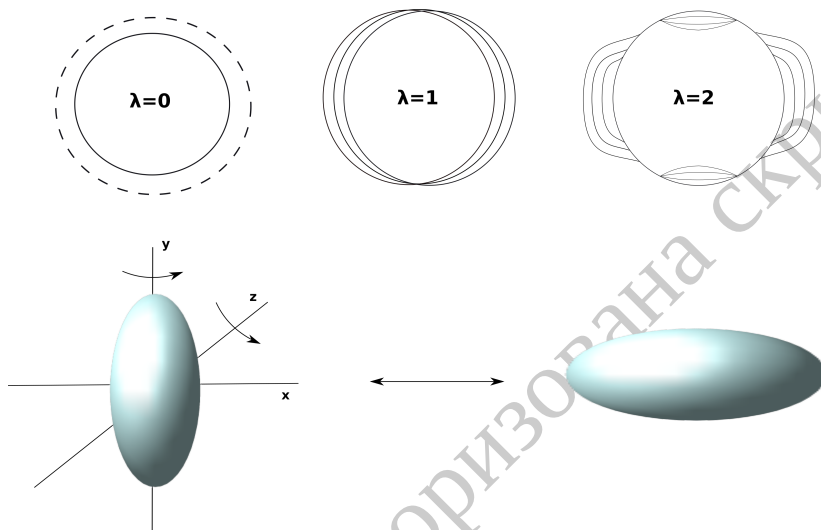
Уве Бор¹¹ и Бен Мотелсон (Aage Bohr & Ben Mottelson) су при конструкцији свог модела узели у обзир постојање колективног кретања нуклеона. Бор је увођење овог модела образложио речима: "У моделу љуске посматра се орбитално кретање индивидуалних нуклеона у усредњеном нуклеарном пољу; у моделу течне капи посматрају се једноставна колективна кретања нуклеона. Чињеница да су оба облика кретања експериментално запажена за језгро, наводи на потребу за општијим описом структуре језгра која ће укупно кретање у језгру разматрати као суперпозицију две поменуте компоненте. Такав приступ може се сматрати генеализацијом модела љуске у којем се нуклеарни потенцијал, претходно сматран константним, сада разматра као динамичка променљива; промене у колективном нуклеарном потенцијалу повезане су за вибрирајућим променама облика језгра." При томе под колективним кретањем модел подразумева вибрације површине језгра и ротацију језгра као целине при којим не долази до промене његове запремине.

Колективне вибрације површине језгра које се могу апроксимирати сферним хармоникима (специјалне математичке функције дефинисане на површини сфере).

$$R(\theta, \phi, t) = R_0 \left(1 + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu}^* Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \right) \quad (2.32)$$

¹¹ син Нилса Бора

Где $R(\theta, \phi)$ представља радијус језгра у времену t смеру дефинисаном угловима θ, ϕ , док је R_0 радијус сферичног језгра. Са $\alpha_{\lambda\mu}^*$ означене су колективне координате и оне су дате у облику тензора. Симбол $Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi)$ означава просторно зависне Лежандрове полиноме. Параметри λ и μ дефинишу мултиплетност и природу тих вибрација. На пример, $\lambda=0$ представља промену радијуса ("дисање") сферичног језгра, $\lambda=1$ (дипол) просто померање центра масе језгра (које у ствари не представља деформацију језгра), $\lambda=2$ (квадрупол) флукуацију облика језгра из спљоштеног у издужени сфероид¹² (види одељак 1.3) и обрнуто итд. На слици 2.13 представљени су видови колективних вибрација и ротација.



Слика 2.13: Вибрације и ротације језгра према колективном моделу.

Други облик кретања су ротације чија је енергија дата изразом

$$E_{rot} = \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2\mathfrak{I}} \quad (2.33)$$

где је J укупни угаони момент, а $\mathfrak{I}$ момент инерције за сфероидно деформисано језгро дат изразом

$$\mathfrak{I} = \frac{2}{5} M A (\Delta R)^2 \quad (2.34)$$

где је ΔR разлика између већег и мањег радијуса сфероида. У случају сферног језгра уместо овог параметра је његов полупречник.

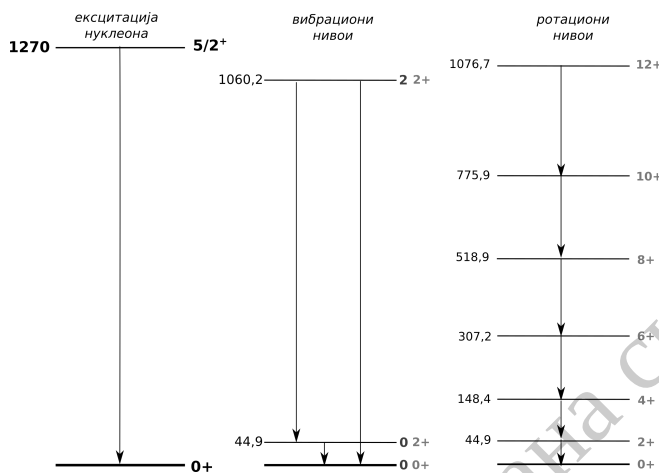
Узимање у обзир зависности нуклеарног потенцијала од ових облика колективног кретања као резултат дај низ вибрационих и ротационих стања. На слици 2.14 дат је приказ енергетских стања за $^{238}\text{U}^{13}$. Овај распоред нивоа је донекле сличан оном код енергетских стања молекула, где једном електронском стању припада одређен број вибрационих нивоа, а сваком од ових сет ротационих нивоа. Вредности добијене помоћу колективног модела показују релативно добро слагање са експериментално одређеним вредностима¹⁴. Поред

¹²Овакав тип деформација утиче на прераспodelу наелектрисања у језгру и последично промене квадруполног момента језгра.

¹³Извор података IAEA ENSDF база, <https://www.nndc.bnl.gov/ensdf/>.

¹⁴Подаци о томе потичу из нуклеарних реакција у којима настаје дато језгро.

тога овај модел успешно предвиђа вредности квадруполних момената језгара. Међутим као ни изворни модел љуске, колективни модел у једном броју случајева не даје коректне вредности спина језгара.



Слика 2.14: Енергетски нивои језгра ^{238}U . Вибрациони квантни бројеви су дати црном, а ротациони сивом бојом.

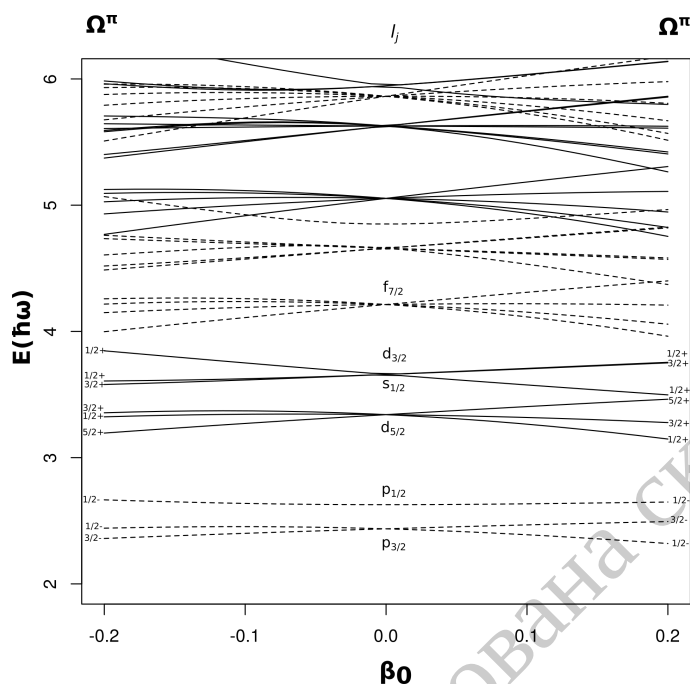
2.4 Нилсонов модел

Строго говорећи, модел љуске који описује кретање нуклеона у пољу које формирају остали нуклеони, је одговарајући само са језгра са нуклеонским конфигурацијама блиским затвореним љускама (која стога имају геометрију блиску сфери). Међутим, у другим случајевима морамо треба узети у обзир да се угаони момент неспареног нуклеона зависи и од ротационог угаоног момента деформисаног језгра. Да би то узео у обзир, Нилсон (Sven Gösta Nilsson) је предложио модел у коме се сваки енергетски ниво модела љуске цепа на $j+1/2$ нивоа. Сваки од тих нивоа уједно представља основни ниво ротационих стања и у њега је могуће сместити два нуклеона. Поред тога енергија нивоа зависи од степена деформација језгра који је описан параметром деформације β_0

$$\beta_0 = 2 \frac{a - c}{a + c} \quad (2.35)$$

Параметри a и c су већ дефинисани у одељку 1.3. Помоћу једначина 1.12 и 1.13 можемо доћи до вредности ових параметара и израчунати β_0 . Једна од последица увођења ове зависности је при параметру деформације $\beta_0 = 0$ (што би одговарало стањима из модела љуске) долази до обртања енергијског редоследа неких стања (нпр. $1p_{3/2}$ постаје нижи по енергији од $1f_{5/2}$). На слици 3.15 дата је зависност енергије нуклеонских стања од параметра деформације¹⁵. модела љуске коригован Нилсоновим моделом успешно предвиђа спин, чак и у случајевима јако деформисаних језгара.

¹⁵ Дијаграм је конструисан помоћу програма отвореног кода Nilsson, <https://codecademy.github.com/bcrowell/nilsson>



Слика 2.15: Нилсонов дијаграм. Ω је квантни број који зависи од j , док је π парност стања

2.5 Модели језгра - закључак

Поред модела језгра који су описани у овом поглављу, постоји велики број других и њихово излагање је ван предмета овог уџбеника. Видели смо да изложени модели који са мање или више недостатака описују структуру и особине језгра. Данас се највише примењује модел љуске јер је у стању да, заједно са корекцијама на колективно кретање и деформацију нуклеарног потенцијала, успешно предвиди енергетска стања језгра, њихов облик, квадруполни електрични момент и спин језгра.



Теоријски модели радиоактивних распада

3.1 Теорија алфа-распада

Емисија алфа-честице из језгра представљала је нерешив проблем за класичну механику. Посматрајмо за почетак обрнут проблем - прилазак алфа честице језгру односно ситуацију сличну приказаној на десној страни слике 2.7. Да би дошла у контакт са језгром она мора да савлада кулоновску потенцијалну баријеру која је око шест пута већа од њене просечне енергије. Још већу баријеру (за енергију везивања) требала би да савлада алфа честица при њеној емисији из језгра. Решење овог проблема дали су независно Гамов, те Конодон и Гурни 1928. године примењујући апарат квантне механике која предвиђа да у случају потенцијалне баријере коначна висине постоји не-нула вероватноћа постојања алфа честице ван њених граница, односно њене емисије из језгра. Другим речима, постоји вероватноћа њеног "тунеловања" кроз потенцијалну баријеру. Вероватноћа емисије α -честице из језгра једнака је производу фреквенције којом она напада баријеру и вероватноће њеног налажења ван потенцијалне баријере односно фактора трансмисије.

$$\lambda = fT. \quad (3.1)$$

Вредност f можемо добити ако препоставимо да се α -честица креће од једне до друге границе језгра константном брзином v и да је њена Де Брољева таласна дужина приближно једнака радијусу језгра, односно

$$\frac{h}{\mu v} \approx R \quad (3.2)$$

где је μ редукована маса α -честице у језгру. Стога је фреквенција којом α -честица напада баријеру је

$$\frac{1}{t} = \frac{v}{2R} = \frac{h}{2\mu R^2} \quad (3.3)$$

Израчунавање вероватноће налажења честице ван потенцијалне баријере је један од класичних примера примене Шредингерове једначине и обрађен је у великом броју уџбеника квантне механике и квантне хемије. Овде ће бити наведен резултат:

$$T = e^{-\frac{4\pi\sqrt{2\mu}}{h} \int_R^{R_x} \sqrt{U(r) - E_\alpha} dr} \quad (3.4)$$

где $U(r)$ представља потенцијалну енергију α -честице, Q_α енергију алфа распада, док је R_x растојање од центра језгра на којем су енергије потенцијалне баријере и α -честице међусобно

једнаке. Коначан израз за вероватноћу емисије α -честице је

$$\lambda \approx \frac{h}{2\mu R^2} e^{-\frac{4\pi\sqrt{2\mu}}{h} \int_R^{R_x} \sqrt{U(r) - E_\alpha} dr} \quad (3.5)$$

Интеграл у овом изразу има аналитичка решења за једноставне облике потенцијалне јаке. Тако је за правоугаону потенцијалну јаму

$$\lambda \approx \frac{h}{2\mu R^2} e^{-\frac{\sqrt{2\mu} e^2 Z_1 Z_\alpha}{\varepsilon_0 h \sqrt{E_\alpha}} [\text{arccos } u - u \sqrt{1-u^2}]} \quad (3.6)$$

где је u

$$u = \sqrt{\frac{E_\alpha}{E_{kb}}} \quad (3.7)$$

где је E_{kb} енергија кулонске баријере

$$E_{kb} = \frac{Z_1 Z_\alpha e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad (3.8)$$

док је R дато као сума радијуса језгра потомка и алфа честице

$$R = R_1 + r_\alpha = r_0 A^{1/3} + r_\alpha \quad (3.9)$$

Израз 3.6 указује да радиоактивна константа јако зависи од енергије α -честице. Тако се за промену E_α од 1 MeV она мења за фактор 10^5 . Уколико је висина кулонске баријере много већа од енергије α -честице и ако се експоненцијални фактор у једначини 3.6 означити са $2G$ имамо

$$\lambda \approx \frac{h}{2\mu R^2} e^{-2G} \quad (3.10)$$

или

$$\ln \lambda = C - 2G(E_\alpha) \quad (3.11)$$

где је G фактор Гамова. Ова једначина је веома слична закону који су Гајгер-Нутал (Hans Geiger, John M. Nuttall) поставили на основу испитивања корелације између времена полураспада радионуклида и енергија α -честица које емитују.¹ Вредности радиоактивне константе које предвиђа ова теорија су за намање ред величине ниже од измерених, што захтева увођење корекционих фактора. Први од њих је корекција на вероватноћу налажења већ формиране α -честице унутар језгра који се добија на основу поређења експериментално и теоријски добијених вредности и има средњу вредност око 0,01. Други корекциони фактор се односи на угаони момент који може да односи α -честица при распаду, који оваква теорија не узима у обзир. Ако је то случај енергију потенцијалне баријере је неопходно повећати за износ центрифугалног потенцијала

$$V_l = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu R^2} \quad (3.12)$$

где је l орбитални угаони момент α -честице, μ редукована маса и R радијус дефинисан једначином 3.9.

Изнета теорија α -распада стриктно важи само за парно-парна језгра. Међутим, радионуклиди са непарним A имају дужи време полураспада него што то теорија предвиђа и за

¹Гајгер-Нуталов закон је $\log t_{1/2} = A + \frac{B}{\sqrt{E_\alpha}}$

разлику од парно-парних језгара која се распадају до основног стања, распадају се до побуђених стања потомка која су по енергији блиска основном стању. Ова одступања се могу узети у обзир увођењем такозваног фактора ометања. Овај параметар зависи од сличности и преклапања таласних функција за језгро предак и језгро потомак и може узимати вредности вредности од 1 па до изнад 1000². Мање вредности одговарају краћим, док веће одговарају дужим временима полураспада.

3.1.1 Дозвољени прелази код α -распада

Да ли ће емисија α -честице бити дозвољена (односно да ли ће прелаз бити дозвољен) зависи од тога да ли су у њему очувани укупни угаони момент и парност. Будући да α -честица нема спин њен l је одређен орбиталним моментом l и њена парност је $(-1)^l$. На пример, уколико је језгро претка у стању 0^+ , тада ће дозвољена стања језгра претка бити $0^+ (l=0)$, $1^- (l=1)$ $2^+ (l=2)$.

3.2 Фермијева теорија бета распада

Континуални спектар електрона у β^- -распаду дуго је представљао загонетку за научнике са почетка двадесетог века, јер се чинило да пркоси познатим законима физика. Решење дилеме дао је Енрико Ферми (Enrico Fermi) својом теоријом ове трансформације у оквиру које је постулирао да се њој поред електрона емитује честица без или веома мале масе коју је назвао неутрином (италијански деминутив од речи неутрон). Почетне претпоставке његове теорије су следеће (исти принцип се односи и на β^+ распад)

- Електрон и антинеутрино нису присутни у језгру, већ настају у самом процесу распада.
- Поред јаке силе (интеракције) у језгру постоји и слаба сила (интеракција) која представља веома слабу пертурбацију и која је одговорна за β -распад.

По временски зависној теорији пертурбација, вероватноћа прелаза између почетног p и крајњег стања k у јединици времена (језгро предак, језгро потомак и емитоване честице са друге стране) P_{kp} је пропорционална коначној густини стања $\rho_f = dn/dE_0^3$ и $|\hat{H}_{kp}|^2$, где је $\hat{H}_{kp}$ матрични елемент Хамилтонијана $\hat{H}$ слабе пертурбације⁴

$$P_{kp} = \frac{2\pi}{\hbar} |\hat{H}_{kp}|^2 \frac{dn}{dE_0} \quad (3.13)$$

где је E_0 енергија β -распада, док је $\hat{H}_{kp}$

$$\hat{H}_{kp} = \int \psi_k^* \hat{H} \psi_p d\tau \quad (3.14)$$

Коначну густину стања можемо одредити помоћу Хајзенбергове једначине за три димензија

$$\Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z \approx \hbar^3. \quad (3.15)$$

²Вредност овог параметра се добија на сличан начин као и параметар преформирања α -честице у језгру.

³Број начина на који је могуће расподелити E_0 на поризводе распада.

⁴Овај израз се назива Фермијевим златним правилом.

Број стања електрона у интервалу импулса између p и $p+dp$ (елемент сфере импулсног простора ширине dp)

$$dn_e = V \frac{4\pi p^2 dp}{h^3} \quad (3.16)$$

где смо са V означили елемент запремине $\Delta x \Delta y \Delta z$. Аналогно томе број стања неутрина је

$$dn_\nu = V \frac{4\pi p^2 dp}{h^3} \quad (3.17)$$

Укупну густину стања у околини енергије E_0 која одговара укупној енергији електрона и неутрина (занемарујемо енергију узмака језгра потомка пошто је мала у односу на укупну енергију распада) добија се множењем претходна два израза

$$\frac{dn}{dE_0} = V^2 \frac{16\pi^2}{h^6} p^2 p_\nu^2 \frac{dp_\nu}{dE_0} dp = V^2 \frac{16\pi^2}{c^3 h^6} p^2 (E_0 - E)^2 dp \quad (3.18)$$

где је импулс неутрина због веома мале апроксимиран импулсом фотона

$$E_\nu = p_\nu c = E_0 - E \quad (3.19)$$

где је E енергија електрона⁵. Израз 3.18 назива се и **статистичким фактором**.

Матрични елемент Хамилтонијана слабе интеракције $\hat{H}_{kp}$ дат је изразом

$$H_{kp} = g \int \Psi_k^* \varphi_e^*(r) \varphi_\nu^* \hat{M} \Psi_i d\tau \quad (3.20)$$

Производ $g\hat{M}$ назива се **потпуним Хамилтонијаном слабе интеракције**, где g представља константу слабе интеракције. Пошто је интеракција неутрина са нуклеонима веома слаба, његову таласну функцију можемо апроксимирати равним таласом⁶

$$\varphi_\nu(r) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{ik_\nu r} = \frac{1}{\sqrt{V}} \left[1 + ik_\nu r + \frac{(k_\nu r)^2}{2} + \dots \right] \approx \frac{1}{\sqrt{V}}. \quad (3.21)$$

где је $k_\nu = p_\nu/\hbar$ таласни вектор неутрина, а $V^{-1/2}$ је нормализациони фактор. За енергије електрона веће од 200 keV и језгра малог A , таласна функција електрона се такође може представити равним таласом

$$\varphi_e(r) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{ik_e r} = \frac{1}{\sqrt{V}} \left[1 + ik_e r + \frac{(k_e r)^2}{2} + \dots \right] \approx \frac{1}{\sqrt{V}}. \quad (3.22)$$

Израз 3.8 добија облик

$$\hat{H}_{kp} = \frac{g}{V} \int \Psi_k^* \hat{M} \Psi_p d\tau = \frac{g}{V} \hat{M}_{kp} \quad (3.23)$$

где $\hat{M}_{kp}$ представља елемент матрични елемент Хамилтонијана прелаза између почетног и крајњег стања. Његова вредност зависи од степена сличности почетног и крајњег стања и трансформација (прелаз) је дозвољен када је његова вредност блиска јединци; ако је много мањи од јединице прелаз је забрањен. Вероватноћа емисије електрона са импулсом изимеђу p и $p+dp$ је

$$P_{kp}(p)dp = N(p)dp = C |M_{kp}|^2 p^2 (E_0 - E)^2 dp \quad (3.24)$$

⁵ Диференцирањем овог израза по енергији добијамо $\frac{dp_\nu}{dE_0} = \frac{1}{c}$

⁶ За мале вредности експонента израз $e^{ik_\nu r}$ се развија у Тејлоров ред и задржи се само први члан.

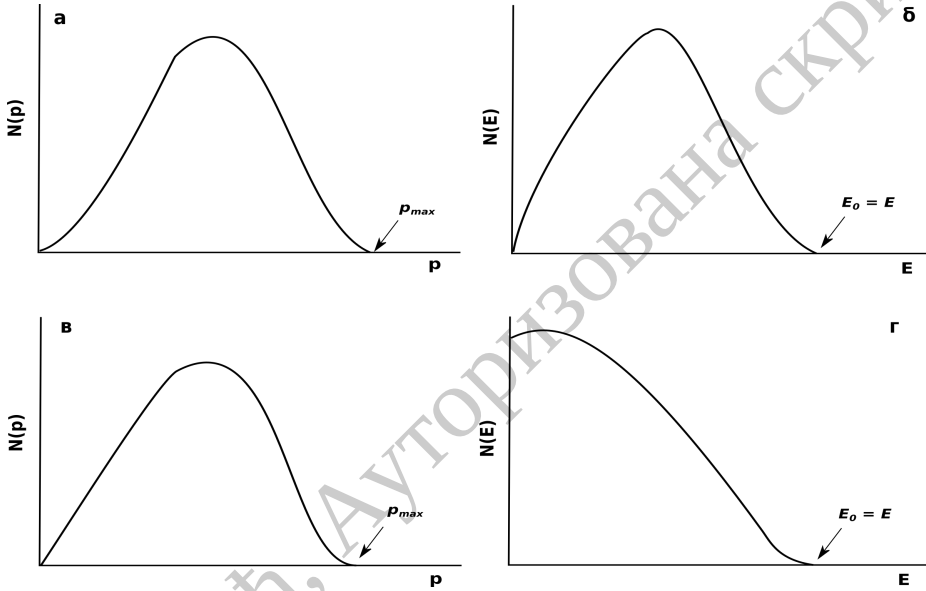
где је C константа дата са

$$C = \frac{g^2}{2\pi^3 c^3 \hbar^7} \quad (3.25)$$

Ова функција има вредност 0 за $p=0$ и када је $E_0=E$ и има максималну вредност између ове две тачке и има облик дат на слици 3.1а. Ову функцију је потребно кориговати на електро-статичку интеракцију између електрона и језгра потомка помоћу множења са корекционим фактором-тзв. **Фермијевом функцијом** $F(Z,p)$ која зависи од редног броја језгра и коначног импулса електрона

$$P_{kp}(p)dp = N(p)dp = C|M_{kp}|^2 F(Z,p)p^2 (E_0 - E)^2 dp. \quad (3.26)$$

На слици 3,1б. приказана је функција $N(p)$ коригована на Фермијеву функцију. Радиоактивну



Слика 3.1: Вероватноћа расподеле импулса и кинетичке енергије електрона а) и б) без корекције и в) и г) са $F(Z,E)$ корекцијом.

константу бета распада могуће је добити интеграцијом горњег израза од $p=0$ до p_{max}

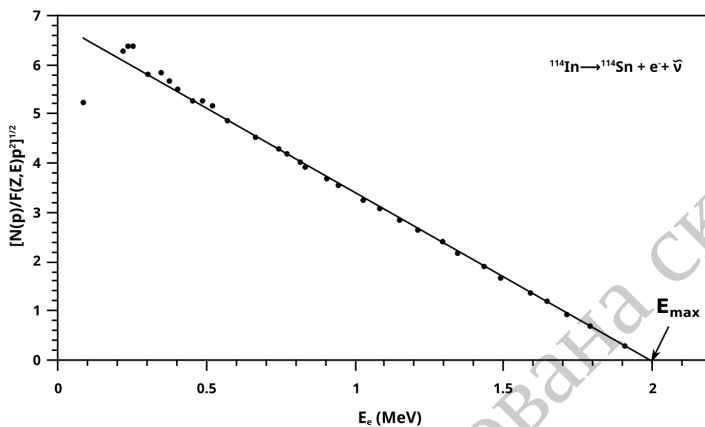
$$\lambda = \int_0^{p_{max}} N(p)dp = C|M_{kp}|^2 \int_0^{p_{max}} F(Z,p)p^2 (E_0 - E)^2 dp = C|M_{kp}|^2 f(Z, E_0) \quad (3.27)$$

Интеграл у изразу се назива **Фермијевом интегралном функцијом** $f(Z,E_0)$ израчунат је за више комбинација аргумената и његове вредности се могу наћи у таблицама. Из овог израза се види да константа радиоактивног распада јако зависи од енергије емитованог електрона и да расте са њом.

На основу израза 3.14 није лако одредити укупну енергију распада E_0 . Ако се он реаранжира добијама следећу зависност

$$\sqrt{\frac{N(p)}{F(Z,E)p^2}} \propto (E_0 - E) |M_{kp}|^2 \quad (3.28)$$

Уколико се се лева стране једначине представи у функцији десне добићемо такозвани **Каријев дијаграм** (Franz N. D. Kurie) који представља линеарну зависност и са кога је могуће одредити E_0 као одсечак на оси енергије. Ову врсту дијаграма је могуће конструисати и на снову експериментално добијеног спектра. Чињеница да је овај дијаграм линеаран указује на то да је $|M_{kp}|^2$ независан од енергије електрона. Пример Каријевог дијаграма за језгро ^{114}In дат је на слици 3.2⁷.



Слика 3.2: Каријев плот за електронне емитоване у распаду ^{114}In

3.2.1 Дозвољени и забрањени прелази код β -распада

Фермијевог интеграл у изразу 3.27 је комплексан, али постоје његова нумеричка решења и његове вредности је могуће наћи у таблицама. Даље, његова вредност је константна за дати распад, па се у том случају за време полураспада може писати

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{1}{C|M_{kp}|^2 f(Z, E_0)} \quad (3.29)$$

или⁸

$$ft_{1/2} = \frac{1}{C|M_{kp}|^2} \quad (3.30)$$

Величина са десне стране се назива **компаративним временом полураспада** и видимо да оно зависи од величине $|M_{kp}|^2$. Што су стања претка и потомка сличнија, то је $|M_{kp}|^2$ веће, а $f(Z, E_0) t_{1/2}$ мање. Поред тога, вредност последњег јако зависи од вредности угаоног момента I и парности. На пример, ако су предак и потомак огледалска језгра (види одељак 2.1.1), стања су веома слична и имају исте угаоне моменте и парност (односно $\Delta I = 0$, β -распаду је јако вероватан и то називамо супердозвољеним прелазом. Са порастом $\Delta I = 0$ производ $ft_{1/2}$ значајно расте, односно овај тип распада постаје све мање вероватан. Детаљна правила избора за β -распад дали су Гамов и Телер и она су представљена у табели 3.1.

⁷Подаци преузети из рада Lawson and Cork, Phys. Rev., v57, p 982-994, 1940.

⁸Због једноставности је $f(Z, E_0)$ означен са f .

Табела 3.1: Правила Гамова и Телера за β -распад

Тип прелаза	ΔI	Промена парности	$\log ft$
Супердозвољен	0	Не	3
Дозвољен	$0, \pm 1$	Не	4-6
Први забрањени	$0, \pm 1, \pm 2$	Да	6-9
Други забрањени	$\pm 2, \pm 3$	Не	10-13

3.3 Деекситација језгра гама распадом

Емисија γ -зрачења представља деекситацију језгра при којој долази до прелаза између нивоа тачно дефинисане енергије (што је карактеристика свих процеса у језгру) при чему не долази до промене броја нуклеона. Вероватноћа емисије гама-зрачења (прелаза) у јединици времена између почетног дата је које је дато преко једначинама 3.13 и 3.14. При емисији гама-фотон односи вредност угаоног момента $l\hbar$ при чему l може узимати целобројне вредности различите од нуле, тако да је прелаз са $\Delta I = 0$ у потпуности забрањен⁹. На основу правила спрезања угаоних момената гама-фотон може имати вредност угаоног момента

$$|(I_p - I_k)| \leq l \leq (I_p + I_k).$$

Деекситација језгра доводи до прерасподеле материје и наелектрисања у језгру што као последицу има промену његових електричних и магнетних особина. У зависност од тога промене спина и одржања/неодржања парности гама зрачење сврставамо у осам типова који су дати у табели 3.2:

Табела 3.2: Типови гама-емисије

Тип емисије	Име	$l = \Delta I$	$\Delta\pi$
E ₁	Електрични дипол	1	Да
M ₁	Магнетни дипол	1	Не
E ₂	Електрични квадрупол	2	Не
M ₂	Магнетни квадрупол	2	Да
E ₃	Електрични октупол	3	Да
M ₃	Магнетни октупол	3	Не
E ₄	Електрични хексадекапол	4	Не
M ₄	Магнетни хексадекапол	4	Да

Узмимо на пример емисију гама-фотона при преласку са другог побуђеног стања нуклида ^{23}Na за које је $I = \frac{7}{2}^+$ на основно стање са $I = \frac{3}{2}^+$. Као што можемо видети, при прелазу не долази до промене парности, док l може узимати вредности $2 \leq l \leq 5$. Стога је при декситацији могућа емисија M₂, E₂, M₃, E₄ и M₅ (прелаз није наведен у табели) фотона.

Израчунавање вероватноће емисије гама-зрачења на основу Фермијевог златног правила (3.13 и 3.14) захтева компликовани прорачун који је ван предмета овог уџбеника. На основу једночестичног модела Блат и Вајцкопф (John M. Blatt & Victor F. Weitskopf) су за нуклеонске прелазе и радијус језгра $r \approx 6 \text{ fm}$ дали следеће изразе за вероватноће емисије

⁹Строго говорећи ово важи само за једнофотонске распаде.

електричних и магнетних типова гама зрачења

$$\lambda_{E_l} = 4,4 \cdot 10^{21} \frac{l+1}{[l((2l+1)!!)^2]} \left[\frac{3}{l+3} \right]^2 \left(\frac{E_\gamma}{197} \right)^{2l+1} r^{2l} \quad (3.31)$$

$$\lambda_{M_l} = 1,9 \cdot 10^{19} \frac{l+1}{[l((2l+1)!!)^2]} \left[\frac{3}{l+3} \right]^2 \left(\frac{E_\gamma}{197} \right)^{2l+1} r^{2l-2} \quad (3.32)$$

где су E_γ енергија гама-фотона у MeV, l његов угаони момент, а r радијус језгра (у fm) које се деексцитује. Тако је за гама фотон M_2 енергије 2,08 MeV из горе описаног примера

$$\lambda_{M_2} = 1,9 \cdot 10^{19} \frac{2+1}{((2 \cdot 2 + 1)!!)^2} \left(\frac{3}{2+3} \right)^2 \left(\frac{2,08 \text{ MeV}}{197} \right)^{(2 \cdot 2 + 1)} (3,7 \text{ fm})^{(2 \cdot 2 - 2)} \quad (3.33)$$

$$\lambda_{M_2} = 1,746 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}. \quad (3.34)$$



М. Даковић, Ауторизована скрипта